CORSO FFM2 (MORETTI) PROGRAMMA EFFETTIVAMENTE SVOLTO AA 2020-2021
(versione corretta 16 giugno 2021)

NOTA GENERALE: Gli argomenti che non appaiono nella lista di sotto non sono stati svolti a lezione per cui non saranno richiesti. Per quelli che appaiono si tenga conto dei commenti scritti.
In ogni caso non sono da conosce ai fini dell’esame cose che non sono state esplicitamente svolte alezione (fanno fede gli appunti presi a lezione).

I risultati generali di analisi sulle serie, tipo il teorema di Weirstrass e la derivazione sotto il segno di serie e di integrale, non saranno oggetto di domande specifiche d’esame, ma devono essere note per poterli usare nelle dimostrazioni.

In caso di dubbi chiedere direttamente al docente via email valter.moretti@unitn.it

1 Introduzione alle equazioni differenziali a derivate parziali del secondo ordine quasi lineari
1.1 Notazioni, definizioni, convenzioni e qualche risultato tecnico elementare
1.1.2 Insiemi connessi per archi differenziabili a tratti (sapere usare, Prop 1.1 solo enunciato)
1.1.3 Norme e seminorme (sapere usare)
1.1.4 Risultati elementari sulle serie di funzioni (sapere usare, solo enunciati)
1.2 Motivazioni fisico matematiche per lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine: le equazioni di Maxwell
1.2.1 Equazioni di Maxwell in forma integrale (non saranno oggetto di esame, ma utili per le motivazioni)
1.2.2 Teoremi di Gauss, Stokes ed equazioni di Maxwell in forma differenziale locale (sapere usare, solo enunciati, l’esempio del passaggio della prima equazione di Maxwell dalla forma integrale a forma differenziale è da sapere dal punto di vista matematico, Osservazioni 1.8 solo accennate)
1.3 Equazioni differenziali del secondo ordine quasilineari
1.3.1 Trasformazioni di coordinate e struttura delle equazioni quasilineari del secondo ordine
1.3.2 Classificazione delle equazioni differenziali quasilineari del secondo ordine (Esempi 1.1 da sapere almeno le equazioni poi trattate nel corso, Esempi 1.3 solo quanto visto a lezione)
1.4 Il problema di Cauchy ed il Teorema di Cauchy-Kovalevskaja
1.4.1 Superfici regolari in R^n

1.4.2 Il problema di Cauchy e la “ben posizione” del problema nel senso di Hadamard
1.4.3 Il Teorema di Cauchy-Kovalevskaja (enunciato del teorema ed idea della dimostrazione)
1.4.4 Il caso di una superfcie regolare generica in R^n descritta in coordinate normali (coordinate normali solo la definizione e l’idea generale)
1.4.5 Nozione di superficie caratteristica

2 Equazioni Ellittiche e funzioni armoniche in R n : risultati elementari.
2.1 Il problema fisico dell’elettrostatica e le equazioni di Poisson e Laplace (Esempi 2.1 e Osservazioni 2.5, solo accennate le questioni relative alle funzioni olomorfe)
2.2 Principio del massimo per funzioni armoniche e principio del massimo generalizzato
2.2.1 Funzione armoniche e sub armoniche in R^n
2.2.2 Principio del massimo (in forma debole)
2.2.4 Due teoremi di unicità per il problema di Dirichlet dal principio del massimo. (I teoremi 2.2, 2.4 e 2.6 non sono stati svolti a lezione)
2.3 Le identità di Green le loro conseguenze elementari.
2.3.1 Identità di Green2.3.2 Conseguenze del teorema di Gauss e delle identità di Green: teorema di unicità per il problema di Neumann

3 Soluzioni fondamentali per l’equazione di Poisson in R n e risultati ad esse legati.
3.1 Soluzioni fondamentali
3.1.1 Proprietà elementari delle soluzioni fondamentali
3.2 Ulteriori proprietà delle funzioni armoniche in R^n
3.2.1 Non esistenza di funzioni armoniche con supporto compatto e non nulle
3.2.2 Le funzioni armoniche definite in aperti di R^n sono C^∞ ed analitiche (Proposizione 3.2 enunciato da sapere ma dimostrazione facoltativa, Proposizione 3.3 da sapere, Teorema 3.3 solo enunciato e idea generale per il caso C^oo, della nozione di funzione analitica reale è solo richiesta la definizione, la nozione di
funzione olomorfa di più variabili complesse non è richiesta)
3.2.3 Teorema della media e principio del massimo in forma forte
3.2.4 Teorema di Liouville per le funzioni armoniche in R^n e non esistenza di funzioni armoniche non nulle a quadrato sommabile in R^n

4 Soluzioni dell’equazione di Poisson su particolari domini tramite Funzioni di Green.
4.1 Soluzione dell’equazione di Poisson in tutto R tramite G_n
4.2 Ancora sul problema di Dirichlet per regioni limitate
4.2.1 Funzioni di Green e nuclei di Poisson (Proposizione 4.1 solo enunciato e idea della dimostrazione, Teorema 4.2 e Proposizione 4.2 solo enunciati)
4.3 Funzioni di Green per domini particolari
4.3.1 Il metodo delle cosiddette cariche immagine
4.3.2 La funzione di Green nella palla in R^3

5 Equazioni iperboliche: alcuni risultati generali elementari per le equazioni di D’Alembert e di Klein-Gordon in R × R^n
5.1 L’equazione di D’Alembert come equazione della corda vibrante e della membrana vibrante
5.1.1 L’equazione per la corda oscillante per piccole deformazioni (Osservazione 5.1 non svolta a lezione)
5.1.2 L’equazione per la membrana oscillante per piccole deformazioni (solo idea intuitiva e equazione)
5.2 Condizioni iniziali ed al contorno
5.3 Bilancio energetico e teoremi di unicità
5.3.1 Densità di energia ed equazione di continuità
5.3.2 Teoremi di unicità (Osservazioni 5.6, 5.7 e Teorema 5.2 non svolte a lezione)

6 Equazione di D’Alembert e di Klein-Gordon in R × R e R × [a, b]
6.1 Equazione di D’Alembert sulla retta reale senza condizioni al contorno
6.1.1 Assenza di sorgenti, formula di D’Alembert, domini di dipendenza (Osservazione 6.2(3) svolta solo in alcuni casi, vedere cosa fatto a lezione, Teorema 6.2 solo qualche accenno, tutta la sezione 6.1.2 non è stata svolta se non qualche accenno, per cui non è da sapere)
6.2 Dalla separazione delle variabili alla serie di Fourier (discorsi intuitivi ripresi dopo, sono solo motivazioni)

6.3 Alcuni risultati elementari sulla serie di Fourier
6.3.1 La serie di Fourier nello spazio di Hilbert L^2 ([−L/2, L/2], dx) (questa parte non sarà oggetto specifico di domande d’esame per quanto riguarda la teoria degli spazi L^2, ma si devono conoscere per eventualmente usarle le definizioni e le proposizioni presentate)
6.3.2 Convergenza uniforme della serie di Fourier e derivazione sotto il simbolo di serie
6.3.3 Serie di Fourier in seni e coseni (solo accennato)

6.4 Il problema su R × [−L/2, L/2] con condizioni al bordo periodiche.
6.4.1 Teorema di unicità
6.4.2 Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari6.4.3 Velocità di fase, frequenza, lunghezza d'onda
6.5 Il problema su R × [0, L] con condizioni al bordo di annullamento (e di Dirichlet)
6.5.1 Teorema di unicità
6.5.2 Esistenza delle soluzioni per dati iniziali sufficientemente regolari

7 Introduzione ai metodi dell'analisi spettrale e qualche applicazione all'acustica musicale
7.1 Generalizzazione della procedura di soluzione con la serie di Fourier su domini più generali
7.1.1 Autofunzioni del laplaciano con condizioni di Dirichlet e serie di Fourier generalizzata
7.1.3 Soluzione dell'equazione di D'Alembert con condizioni di Dirichlet tramite l'analisi spettrale: un caso semplificato
7.1.4 Membrana rettangolare e membrana circolare (Membrana circolare solo qualche accenno)
7.1.5 Fenomeni di smorzamento e risonanza in risuonatori forzati (L'identità (7.34) non è stata dimostrata ma bisogna conoscerla per il resto della dim della proposizione 7.5 Forma (7.51) della soluzione non discussa, Osservazioni 7.6 non svolte)
7.3 Un po' di fisica matematica del suono e della musica
7.3.1 Strumenti musicali a corda (solo accenni)
7.3.2 Il suono prodotto dagli strumenti musicali a corde (solo accenni)
7.3.3 Le note musicali pure e note con timbro (solo accenni)
7.3.4 Scale e temperamenti (solo accenni)
7.3.5 Possiamo udire la forma di un tamburo?

8 Equazioni paraboliche: l'equazione del calore e le sue proprietà elementari
8.1 L'equazione del calore dalla termodinamica dei continui
8.2 Condizioni iniziali ed al contorno, frontiera parabolica
8.3 Un problema atipico, ma storicamente importante: il problema della cantina di Fourier