Conferenza Premio Nobel per la Fisica 2022
17/11/2023 - Università di Trento

ENTANGLEMENT E DISUGUAGLIANZA BELL-CHSH

Valter Moretti Dip Matematica e TIFPA-INFN

Abstract: Discuterò brevemente i fatti teorici più importanti che stanno alla base degli esperimenti di Aspect, Clauser e Zelliger che hanno valso loro il premio Nobel per la fisica 2022.

1. PREMESSA: NATURA QUANTISTICA DI UN SISTEMA FISICO.

La caratteristica più nota dei sistemi quantistici (nota dagli inizi del '900) riguarda i valori che assumonoi alcune grandezze fisiche, valori a volte diversi dai valori delle stesse classiche. Certe grandezze risultano avere *valori discreti* o **quantizzati** anche se classicamente hanno valori continui.

ES1. Momento angolare di particelle quantistiche: valori $n\hbar/2$ con n intero (con segno).

ES2. Energia totale per particelle in buche di potenziale: risulta prendere *anche* valori discreti, per esempio **i livelli energetici dell'atomo di idrogeno**.

Tipicamente i sistemi quantistici sono **microscopici** (molecole, atomi, particelle elementari), ma esistono anche sistemi fisici **macroscopici** con *comportamento quantistico*: per esempio **condensati di Bose-Einstein**.

Quando ci si aspetta comportamento quantistico?

costante di Planck $h = 6.62607015 \times 10^{-34} J \cdot s$ $\qquad (\hbar := \frac{h}{2\pi})$

Azione caratteristica del sistema = **Energia x Tempo tipici del sistema**

- Azione caratteristca $\gg h \Rightarrow$ **sistema classico**
  ES. Pendolo massa $1Kg$, lunghezza $1m$, $v_{max} = 1m/s$, azione carattersistica $\sim 1Js$.

- Azione caratteristica $\sim h \Rightarrow$ **sistema evidenzia proprietà quantstiche**
  ES. Atomo semiclassico idrogeno: energia di prima ionizzazzione $\times$ periodo classico elettrone $\sim h$

2. COMPORTAMENTO GENERALE DEI SISTEMI QUANTISTICI.

Dato un sistema quantistico (ES. un'elettrone, una molecola, ecc...) si parla di:

- **Osservabile** A = grandezza fisica misurabile su un sistema quantistico con un certo apparato di misura con possibili valori $a \in \mathbb{R}$, discreti o continui o entrambi.
- **Stato** (ad un dato tempo) ψ = massima informazione disponibile sul sistema.

I sistemi quantistici possiedono le seguenti caratteristiche che li differenziano da quelli classici.

- **Sono probabilistici**. Considero tanti copie identiche del sistema, *tutte nello stesso stato* ψ. Se misuro la *stessa* osservabile A su ciascuna copia, in generale, ottengo valori diversi $a, a', a'', ...$ ma esiste evidenza fenomenologica che le probabiltà di ciascun esito $a, a', ...$ siano connesse allo (in realtà determinate dallo) stato ψ.
- **Presentano osservabili incompatibili**. Esistono coppie di osservabili A e B per cui non esiste alcun strumento fisico che sia in grado di misurarle simultaneamente: posizione e Impulso oppure componenti L_x e L_y del momento angolare, ecc. Se, partendo da uno stato ψ, cerco di misurare in sequenza due osservabili incompatibili $ABAB$.... gli esiti delle misure si disturbano: $aba'b'$... con in generale $a \neq a'$, $b \neq b'$ ecc...
- **Danno luogo al fenomeno del "collasso dello stato"**. Se misuro un'osservabile A sullo stato ψ e trovo il valore a, lo stato cambia bruscamente $\psi \to \psi'_a$ *immediatamente dopo la misura*. Il nuovo stato ψ'_a è legato all'osservabile che ho misurato ed al valore a che ho ottenuto.

3. VERSIONE ELEMENTARE DELL'ASSIOMATIZZAZIONE STANDARD O INTERPRETAZIONE DI COPENHAGEN (Dirac & von Neumann, anni '30).

- **Stati** ("puri" al tempo t): *vettori di norma unitaria* $\psi \in \mathcal{H}$, spazio vettoriale complesso con prodotto scalare hermitiano $\langle \psi | \psi' \rangle$.

  ($\mathcal{H}$ è propriamente spazio di Hilbert e ψ, ψ' unitari definiscono lo stesso stato se $\psi' = e^{ia}\psi$.)

- **Osservabili**: *operatori lineari* $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *hermitiani.*

  (Sottigliezze matematiche se $\dim(\mathcal{H}) = \infty$, ma noi lavorareremo in dimensione finita)

Come si usano questi due assiomi per formalizzare le tre precedenti caratteristiche dei sistemi quantistici?

- I valori dell'osservabile A sono gli **autovalori** a dell'operatore A. *a reale dato che A hermitiano.*

- A **è definita** in ψ con **valore** $a \Leftrightarrow \psi$ è a-**autovettore** (o **autostato**) di A, $A\psi = a\psi$.

- Se A non definita in ψ, sviluppo ψ in una base ortonormale di autovettori ψ_a, $A\psi_a = a\psi_a$

$$\psi = \sum_a \langle \psi_a | \psi \rangle \psi_a \qquad (\text{notare che} \quad 0 \leq |\langle \psi_{a_0} | \psi \rangle|^2 \leq 1 \, , \quad \sum_a |\langle \psi_{a_0} | \psi \rangle|^2 = 1)$$

  Si assume che $|\langle \psi_{a_0} | \psi \rangle|^2$ **= probabilità di misurare** a_0 **sullo stato** ψ **se misuro** A.

- Se misuro A su ψ di sopra e trovo a_0 allora lo stato **collassa immediatamente**

$$\psi \to \psi_{a_0} \, .$$

  Nel nuovo stato A risulta essere definita con valore a_0: $A\psi_a = a\psi_a$.

- Dalle interpretazioni date sopra:

$$\langle \psi | A\psi \rangle = \sum_a a |\langle \psi_{a_0} | \psi \rangle|^2 =: \langle A \rangle_\Psi \tag{1}$$

  ha dunque il significato di **valor medio di** A **nello stato** ψ.

- Due osservabili A, B sono **compatibili** (= si possono misurare simultaneamente) se

$$AB = BA \, .$$

  In questo caso esiste una **base ortonormale comune di autovettori** su cui entrambe le osservabili sono definite: $\{\psi_j\}$,

$$A\psi_j = a_j \psi_j \quad e \quad B\psi_j = b_j \psi_j \, .$$

NB. Se non eseguo misure di osservabili allora lo stato ψ evolve nel tempo secondo l'*Equazione di Schrödinger* che non discutiamo in queste note.

4. ESEMPIO CON LO SPIN DELL'ELETTRONE.

Gli elettroni – e tutte le particelle quantistiche **con massa** elementari e non – hanno un *momento angolare intrinseco* (= calcolato rispetto al loro centro) che si dice **spin**. Classicamente lo spin è un vettore, quantisticamente, riferendosi ad un sistema di assi ortonormali x, y, z è una **terna di osservabili** (analoga discussione per i **fotoni** dove la **polarizzazione** sostituisce lo spin). In dettaglio:

- Gli **stati di spin** sono vettori di norma unitaria $\psi \in \mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_{spin}$.
- Le 3 **osservabili componenti del vettore di spin** sono 3 matrici hermitiane **di Pauli** – a meno del fattore $\hbar/2$ che sarà omesso d'ora in poi –

  $$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  NB. Sono osservabili **incompatibili**: $[\sigma_x, \sigma_y] = i2\sigma_z$ (e permutazioni cicliche).
- I valori assumibili dall'osservabile σ_z sono gli autovalori ± 1 con autostati

  $$|+1\rangle_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad |-1\rangle_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  I valori assumibili da σ_x sono gli autovalori ± 1 con autostati $|+1\rangle_x$, $|-1\rangle_x$, idem per σ_y.
- Vale per esempio:

  $$|\pm 1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+1\rangle_z \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle_z \, .$$

  Pertanto, se lo stato iniziale è $\psi = |+1\rangle_x$ significa che σ_x è definito ed ha valore $+1$, ma σ_z e σ_y non lo sono.
- Tuttavia, se eseguiamo una misura di σ_z sullo stato iniziale $|+1\rangle_x$ abbiamo
  - probabilità $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$ di trovare il valore $+1$ per σ_z
    e immediatamente dopo la misura $|+1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle_z + |-1\rangle_z)$ collassa in $|+1\rangle_z$
  - probabilità $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$ di trovare il valore -1 per σ_z
    e immediatamente dopo la misura $|+1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+1\rangle_z + |-1\rangle_z)$ collassa in $|-1\rangle_z$
- Le osservabili di spin $\mathbf{n} \cdot \sigma$, cioè **lungo l'asse generico n** (vettore spaziale di lunghezza 1), hanno ancora (auto)valori ± 1 a causa dell'invarianza sotto rotazioni.

5. CRITICA DI EINSTEIN-PODOLSKI-ROSEN (1935).

PRINCIPIO DI REALISMO EPR-Bell (intepretazione moderna di Legget): *tutte le grandezze fisiche definibili su un sistema fisico assumono valori definiti in ogni istante.*

In tal caso conoscere lo stato del sistema al tempo t significa poter calcolare i valori di tutte le grandezze sul sistema a tale tempo.

- La **Meccanica Classica** (MC) **soddisfa** il principio di realismo EPR-Bell.
- In MC ci sono **teorie probabilistiche** (ES. **teoria cinetica**, **meccanica statistica**) in cui lo stato determina i valori di tutte le grandezze **solo con una certa probabilità**. Questa probabilità è **epistemica**: rappresenta la *nostra conoscenza parziale* del vero stato del sistema. Il **vero stato** della MC soddisfa comunque il principio del realismo.
- La **Meccanica Quantistica** (MQ) nell'interpretazione di Copenhagen **non soddisfa** il principio del realismo EPR-Bell. L'esistenaza di **osservabili incompatibili** implica che *per qualunque fissato stato ψ al tempo t, alcune osservabili non siano definite.*
- Nell'interpretazione di Copenhagen ψ descrive completamente il sistema, ma determina **solo le probabilità dei valori delle osservabili se decido di misurarle** (quando un'osservablie A è definita con valore a in ψ la probabilità assegnata è 1). **La probabilià della MQ è ontica** e non epistemica: *non dipende dalla nostra non conoscenza del sistema, ma dalla natura stessa del sistema.*

La frase critica di Einstein contro l'intepretazione di Copenhagen "Dio non gioca a dadi" è riferita all'assunzione di probabilità di tipo ontico e non epistemico in una teoria fisica fondamentale.

Einstein, Podolski e Rosen nel 1935, basandosi sulla violazione del *principio di località* da parte della MQ, esplicitarono l'idea che la MQ fosse **incompleta**. Nel linguaggio di oggi:

- deve esistere una teoria più fondamentale di natura classica e realistica. Ad ogni tempo lo stato vero (nascosto) è descritto da alcune **variabili nascoste** $\lambda \in \Lambda$ **che fissano i valori** $v(A|\lambda)$ **di tutte le osservabili** A **del sistema** a tale tempo.
- **Lo stato quantistico** ψ **non fissa** λ: se una famiglia di sistemi identici è nello stato ψ, in realtà ogni sistema avrà un valore λ diverso $\Rightarrow v(A|\lambda)$ diversi anche se ψ ̀lo stesso.
- Per un dato ψ, lo stato nascosto λ è distribuito con una certa densità di probabilità $\mu(\lambda)$ su Λ.
- $\mu(\lambda)$ **spiega** la fluttuazione statistica dei valori $v(A|\lambda)$ delle osservabili A che quantisticamente sono *non definite* nello stato ψ.

Andiamo ora a presentare una riformulazione dovuta e Bohm e Bell dell'argomentazione usata da EPR per arrivare alle idee di sopra, e *superarle*, che evidenzia la nozione cruciale di **entanglement**.

6. RIFORMULAZIONE EPR DI BOHM E BELL: ENTANGLEMENT (primi '60).

Sistema quantistico S **composto da sottosistemi** S_1 e S_2 con spazi degli stati $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$:

- lo spazio degli stati di S è il **prodotto tensoriale** $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Questo è spazio vettoriale complesso di dimensione $\dim \mathcal{H}_1 \times \dim \mathcal{H}_2$.

- Stati **fattorizzati**: $\psi_1 \otimes \psi_2 \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, dove $\psi_1 \in \mathcal{H}_1$, $\psi_2 \in \mathcal{H}_2$. Ovvio significato fisico: S_1 è nello stato ψ_1 e il sistema S_2 è nello stato ψ_2.

- $\mathcal{H}$ è spazio vettoriale $\Rightarrow$ **principio di sovrapposizione degli stati**: *combinazioni lineari di vettori (stati) sono ancora vettori (stati).*

  Ci sono stati non fattorizzati o **entangled**: sono rappresentati (normalizzandoli) da vettori

$$a\psi_1 \otimes \psi_2 + b\psi_1' \otimes \psi_2' \qquad \text{(significato fisico non ovvio)}\,.$$

Consideriamo più precisamente un sistema di due elettroni $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, per cui:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{posizioni\, \mathcal{A}\, e \mathcal{B}} \otimes \mathcal{H}_{spin \mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{spin \mathcal{B}}\,.$$

○ Lo stato in $\mathcal{H}_{spin\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{spin\mathcal{B}}$ sia entangled e sia lo **stato di Bell**:

$$\Psi := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+1\rangle_{z\mathcal{A}} \otimes |-1\rangle_{z\mathcal{B}} - |-1\rangle_{z\mathcal{A}} \otimes |+1\rangle_{z\mathcal{B}}\right)$$

Notare che lo spin σ_z **non** *è quindi definito in Ψ né per $\mathcal{A}$ né per $\mathcal{B}$.*
○ La parte di stato in $\mathcal{H}_{posizioni\, \mathcal{A} e \mathcal{B}}$ descriva *elettroni che si allontanano reciprocamente.*
○ Misuro – cioè definisco – lo spin di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ nelle regioni spaziali $\mathscr{R}_{\mathcal{A}}$ e $\mathscr{R}_{\mathcal{B}}$:

- Se **in** $\mathscr{R}_{\mathcal{B}}$ misuro σ_z su $\mathcal{B}$ e trovo $+1$ allora lo stato subito dopo la misura sarà $|-1\rangle_{z\mathcal{A}} |+1\rangle_{z\mathcal{B}}$. In tal caso, misurando σ_z **in** $\mathscr{R}_A$ su $\mathcal{A}$ avrò la certezza di trovare -1.

- Se **in** $\mathscr{R}_{\mathcal{B}}$ misuro σ_z su $\mathcal{B}$ e trovo -1 allora lo stato subito dopo la misura sarà $|+1\rangle_{z\mathcal{A}} |-1\rangle_{z\mathcal{B}}$. In tal caso, misurando σ_z **in** $\mathscr{R}_A$ su $\mathcal{A}$ avrò la certezza di trovare $+1$.

Se le misurazioni avvengono in intervalli temporali abbastanza brevi e le regioni sono abbastanza lontane l'informazione del collasso in $\mathscr{R}_{\mathcal{B}}$ per raggiungere $\mathscr{R}_{\mathcal{A}}$ dovrebbe viaggiare **più velocemente della luce**: apparentemente la MQ viola il **principio di località relativistico**. Per EPR questo è impossibile e dunque:

- i valori di σ_z per $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ devono essere in realtà già **definiti prima della loro misura** e la correlazione di valori è stata fissata **prima** della separazione delle particelle **senza violare la località**.

- La MQ nella formulazione di Copenhagen non è in grado di descrivere come tali valori siano definiti prima delle misure: è incompleta.

- *Deve allora esistere una riformulazione più profonda della MQ,* **locale** *e* **realistica**, *basata su una variabile nascosta $\lambda \in \Lambda$ che fissi i valori $v(X|\lambda)$ di tutte le osservabili X in modo locale.*

7.DISUGUAGLIANZA BELL-CHSH E SUO SIGNIFICATO 1.

Passiamo all'interpretazione oggi condivisa dai fisici, essenzialmente dovuta a Legget 2003, dei lavori di Bell del 1964 e di Caluser, Horn, Shimony e Holt del 1969 che vanno oltre l'argomento EPR sia in termini teorici che sperimentali.

- Consideriamo un numero grande di coppie di elettroni $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ tutte preparate nello stesso stato di spin Ψ (non necessariamente entangled). Gli elettroni si allontanano reciprocamente e raggiungono le regioni spaziali $\mathscr{R}_{\mathcal{A}}$ e $\mathscr{R}_{\mathcal{B}}$.
- Assumiamo che le regioni spaziali $\mathscr{R}_{\mathcal{A}}$ e $\mathscr{R}_{\mathcal{B}}$ siano **causalmente separate** nel periodo di tempo necessario alle misure di spin: nessuna informazione può passare tra le due regioni veicolata da enti fisici che viaggiano con velocità inferiore a quella della luce.
- Assumiamo di poter misurare nelle regioni suddette con opportuni apparati:
  - sulla particella $\mathcal{A}$ il suo spin $\mathbf{a}\cdot\sigma$ lungo l'asse generico $\mathbf{a}$ nella regione $\mathscr{R}_{\mathcal{A}}$,
  - sulla particella $\mathcal{B}$ il suo spin $\mathbf{b}\cdot\sigma$ lungo l'asse generico $\mathbf{b}$ nella regione $\mathscr{R}_{\mathcal{B}}$.

Supponiamo con EPR che esista una **teoria a veriabili nascoste** $\lambda \in \Lambda$ in grado di assegnare ad ogni particella di ciascuna coppia i valori $v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda) \in \{\pm 1\}$ e $v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda) \in \{\pm 1\}$ delle componenti dello spin lungo ogni coppia di assi, rispettivamente $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Assumiamo esplicitamente le richieste:

- **Realismo**: i valori $v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda)$ e $v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)$ sono sempre assegnati per qualunque scelta degli assi $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.
- **Località**: dato che le regioni sono causalmente separate, $v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda)$ in $\mathscr{R}_{\mathcal{A}}$ non dipende dalla scelta di $\mathbf{b}$ in $\mathscr{R}_{\mathcal{B}}$ e $v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda)$ in $\mathscr{R}_{\mathcal{B}}$ non dipende dalla scelta di $\mathbf{a}$ in $\mathscr{R}_{\mathcal{A}}$.
  (**NB**. Altrimenti scriveremmo, per es., $v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda,\, \mathbf{b})$ invece di $v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda)$)

Anche se le coppie appaiono quantisticamente tutte nello stato Ψ, dal punto di vista della teoria a variabili nascoste ogni coppia avrà un **suo** valore λ. Assumo che λ abbia una distribuzione di probabilità $\mu(\lambda)$ su Λ per le coppie preparate tutte nello stato Ψ. Posso definire i valori medi dei prodotti dei valori:

$$E_\mu(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \int_\Lambda v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda)v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)d\mu(\lambda)$$

(L'integrale può essere una somma se la distribuzione di probabilitàè discreta, l'importante è che l'integrale/somma totale sia 1 dato che μ è una probabilità.)

Nelle ipotesi di esistenza di una tale teoria a variabili nascoste **locale** e **realistica**, per ogni scelta degli assi $\mathbf{a},\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}'$ e per ogni scelta dello stato di preparazione Ψ (e corrispondente distribuzione di probabilità μ) vale la disuguaglianza CHSH che dimostriamo più avanti:

$$-2 \leq E_\mu(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) + E_\mu(\mathbf{a}',\, \mathbf{b}) + E_\mu(\mathbf{a}',\, \mathbf{b}') - E_\mu(\mathbf{a},\, \mathbf{b}') \leq 2\,. \tag{2}$$

7.DISUGUAGLIANZA BELL-CHSH E SUO SIGNIFICATO 2.

Se invece uso la teoria quantistica, i valori medi $E_\mu(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ si devono *anche* ottenere con il formalismo standard della MQ :

$$E_\mu(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \langle(\mathbf{a}\cdot\sigma)\otimes(\ \mathbf{b}\cdot\sigma)\rangle_\Psi\ , \tag{3}$$

dove $\langle(\mathbf{a}\cdot\sigma)\otimes(\ \mathbf{b}\cdot\sigma)\rangle_\Psi$ rappresenta il **valor medio dell'osservabile** $(\mathbf{a}\cdot\sigma)\otimes(\ \mathbf{b}\cdot\sigma)$ nello stato quantistico Ψ come visto precedentemente (1). *L'identificazione delle medie classiche e quantistiche deve sussistere proprio perché la presunta teoria a variabili nascoste spiega la fenomenologia della MQ.*

Lavorando con **stati fattorizzati** la CHSH non risulta mai violata, ma se uso uno **stato entangled** della forma di Bell:

$$\Psi := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+1\rangle_{z\mathcal{A}}\otimes|-1\rangle_{z\mathcal{B}} - |-1\rangle_{z\mathcal{A}}\otimes|+1\rangle_{z\mathcal{B}}\right)$$

e scelgo gli assi in modo opportuno:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x\ ,\quad \mathbf{a}' = \mathbf{e}_z\ ,\quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_z}{\sqrt{2}}\ ,\quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{e}_z-\mathbf{e}_x}{\sqrt{2}}$$

ottengo una **violazione** (la massima possibile) della disuguaglianza CHSH:

$$\langle(\mathbf{a}\cdot\sigma)\otimes(\ \mathbf{b}\cdot\sigma)\rangle_\Psi + \langle(\mathbf{a}'\cdot\sigma)\otimes(\ \mathbf{b}\cdot\sigma)\rangle_\Psi + \langle(\mathbf{a}'\cdot\sigma)\otimes(\ \mathbf{b}'\cdot\sigma)\rangle_\Psi - \langle(\mathbf{a}\cdot\sigma)\otimes(\ \mathbf{b}'\cdot\sigma)\rangle_\Psi = 2\sqrt{2}\,,$$

che viola (2) in virtù di (3).

Se assumiamo realismo e località la MQ non dovrebbe dunque essere incompleta, come pensavano EPR, ma semplicemente sbagliata.

Dal punto di vista sperimentale, **indipendentemente dall'esistenza della teoria a variabili nascoste e della MQ**, posso valutare $E_\mu(\mathbf{a},\mathbf{b})$ come

$$E_\mu(\mathbf{a},\mathbf{b}) \sim \frac{N_{++}^{(\mathbf{a},\,\mathbf{b})} - N_{+-}^{(\mathbf{a},\,\mathbf{b})} - N_{-+}^{(\mathbf{a},\,\mathbf{b})} + N_{--}^{(\mathbf{a},\,\mathbf{b})}}{N_{++}^{(\mathbf{a},\,\mathbf{b})} + N_{+-}^{(\mathbf{a},\,\mathbf{b})} + N_{-+}^{(\mathbf{a},\,\mathbf{b})} + N_{--}^{(\mathbf{a},\,\mathbf{b})}}\ ,$$

Sopra $N_{+-}^{(\mathbf{a},\,\mathbf{b})}$ è il numero di coppie per cui $\mathbf{a}\cdot\sigma$ è stato misurato con valore $+1$ su $\mathcal{A}$ e $\mathbf{b}\cdot\sigma$ è stato misurato con valore -1 su $\mathcal{B}$ ecc.

Possiamo quindi dirimere la diatriba sperimentalmente!

La disuguaglianza CHSH vale anche per if **fotoni** rimpiazzando lo spin con la **polarizzazione**. In ogni caso è risultata **sempre sperimentalmente violata** (eccetto in un esperimento).

Tuttavia è molto difficile assicurarsi che i dati sperimentali attestino con certezza la violazione, dato un'apparente violazione potrebbe essere dovuta ad effetti di altra natura. Per esempio il fatto che i detectors non hanno efficienza del 100% e quindi non tutte le coppie sono rivelate e di alcune coppie se ne rivela solo una particella ecc. Questi problemi sono chiamati **loopholes** e ne esiste una lista abbastanza lunga che necessita di precauzioni sperimentali molto sofisticate per escluderli. Nel 2015 è apparso il primo articolo (B. Hanson) che dichiarava di avere un test loophole-free con elettroni separati da 1.3 Km.

8. DISUGUAGLIANZA BELL-CHSH E SUO SIGNIFICATO 3.

La disuguaglianza di Bell (1964) era differente dalla disuguaglianza CHSH ed era più difficile da testare sperimentalmente, cosa fatta comunque da **Clauser** nel 1972. Il primo test della disuguaglianza CHSH del 1982 è dovuto ad **Aspect**. Tests più recenti sono dovuti tra glia altri anche a **Zellinger**.

■ Dal punto di vista sperimentale, alla luce dei numerosi esperimenti per testare la violazione della disuguaglianza CHSH, sembra ormai certo che la **località sia violata** dalla fenomenologia quantistica, nel preciso senso che **le correlazioni tra misure di spin in regioni dello spaziotempo causalmente separate esistono davvero**. La domanda che allora ci si pone, ed è questo un punto cruciale della critica EPR, è *se sia davvero possibile trasmettere informazione fisica tra queste due regioni usando queste correlazioni.*

□ **Assumendo per vera la MQ**, la risposta è che **non** è possibile, a dispetto dell'esistenza delle correlazioni. In gergo: la MQ viola la località, nel senso di prevedere correlazioni non locali, ma resta comunque una teoria **no-signaling**. Consideriamo due possiblità di tramissione di informazione usando l'entanglemet e la procedura di misura.

- Un'idea potrebbe essere di usare uno dei due elettroni della coppia entanglata e imporre al suo spin lungo z di essere $+1$ o -1 a piacimento. Dall'altro lato dell'universo, l'altro elettrone presenterebbe rispettivamente spin -1 oppure $+1$. Con il codice Morse si potrebbe trasmettere istantaneamente un messaggio. Tutto ciò non è possibile perché *non esiste alcuna procedura in grado di rivoltare a nostro piacimento lo spin in un processo di misura: l'esito della misura è (onticamente) casuale secondo la MQ.*

- Un'idea più sofisticata è quella di usare simultaneamente un gran numero di coppie tutte preparate nello stato entanglato Ψ. A questo punto posso decidere in $\mathscr{R}_{\mathbb{A}}$ di misurare una certa osservabile di spin, oppure un'altra osservabile di spin, oppure non fare nulla. Ci si potrebbe aspettare che facendo tali misure oculate di spin in $\mathscr{R}_{\mathbb{A}}$, si possa osservare un **cambiamento della statistica** degli esiti delle misure $\mathscr{R}_{\mathbb{B}}$ sulle particelle partners. Usando il formalismo standard della MQ si può provare che, *qualunque tipo di misura si esegua in $\mathscr{R}_{\mathbb{A}}$, quasta non influenza la statistica degli esiti delle misure in $\mathscr{R}_{\mathbb{A}}$*. (Si veda "Filosofia della Fisica" a cura di G. Boniolo, Bruno Mondadori Editore 1997)

■ Dal punto di vista teorico, la violazione della disuguaglianza CHSH prova che **non** può esistere una teoria a variabili nascoste che sia simultaneamente **realistica e locale** in grado di spiegare la fenomenologia sperimentale quantistica. C'è qualche scelta su chi *non* assumere, tra realismo e località?

□ Esiste una teoria a variabili nascoste **realistica** ma **non locale** che è **osservativamente equivalente** alla **MQ non-relativistica standard**: la **teoria di de Broglie-Bohm**.

9. DERIVAZIONE DELLA DISUGUAGLIANZA CHSH.

Dimostreremo qui la disuguaglianza CHSH (2). Partiamo dall'identità:

$$|E(\mathbf{a},\,\mathbf{b})+E(\mathbf{a}',\,\mathbf{b})+E(\mathbf{a}',\,\mathbf{b}')-E(\mathbf{a},\,\mathbf{b}')| =$$

$$\left|\int_\Lambda v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda)v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)+v(\mathbf{a}'\cdot\sigma|\lambda)v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)+v(\mathbf{a}'\cdot\sigma|\lambda)v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)-v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda)v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)\,d\mu(\lambda)\right|$$

$$=\left|\int_\Lambda v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda)[v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)-v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)]+v(\mathbf{a}'\cdot\sigma|\lambda)[v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)+v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)]\,d\mu(\lambda)\right|$$

Osservazione. Il raccoglimento dei fattori $v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda)$ e $v(\mathbf{a}'\cdot\sigma|\lambda)$ **non** sarebbe possibile **se non valesse la località** che assicura che $v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda)$ non dipende dalla scelta tra $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}'$.

L'ultimo integrale si maggiora con

$$\int_\Lambda |v(\mathbf{a}\cdot\sigma|\lambda)||v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)-v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)|+|v(\mathbf{a}'\cdot\sigma|\lambda)||v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)+v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)|\,d\mu(\lambda)$$

$$=\int_\Lambda |v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)-v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)|+|v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)+v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)|\,d\mu(\lambda$$

dato che $v(\mathbf{c}\cdot\sigma|\lambda)=\pm1$. Per lo stesso motivo: $|v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)-v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)|=0$ e $|v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)+v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)|=2$ oppure $|v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)+v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)|=0$ e $|v(\mathbf{b}\cdot\sigma|\lambda)-v(\mathbf{b}'\cdot\sigma|\lambda)|=2$. In definitiva

$$|E(\mathbf{a},\,\mathbf{b})+E(\mathbf{a}',\,\mathbf{b})+E(\mathbf{a}',\,\mathbf{b}')-E(\mathbf{a},\,\mathbf{b}')|\le\int_\Lambda 2d\mu(\lambda)=2\int_\Lambda 1d\mu(\lambda)=2$$

dato che μ è una misura di probabilità. La disuguaglianza ottenuta si può scrivere equivalentemente nella forma CHSH:

$$-2\le E(\mathbf{a},\,\mathbf{b})+E(\mathbf{a}',\,\mathbf{b})+E(\mathbf{a}',\,\mathbf{b}')-E(\mathbf{a},\,\mathbf{b}')\le 2\,.$$

10. UN PO' DI BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE.

I padri fondatori

P.A.M. Dirac, *The principles of Quantum Mechanics.* Oxford University Press, (1930)

J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Springer-Verlag, Berlin (1932)

Per il formalismo fisico matematico generale in un linguaggio moderno e la bibliografia teorica (specialmente il cap 5) si veda, per esempio,

V. Moretti, *Fundamental Mathematical Structures of Quantum Theory, Spectral Theory, Foundational Issues, Symmetries, Algebraic Formulation*, 337 pages, Springer 2019 ISBN 978-3-030-18345-5

Einstein-Podolski-Rosen

A Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?.* Physical Review **47**, 777, (1935)

Lavori di Bell originali

J.S. Bell, *On the Einstein Podolski Rosen paradox.* Physics **1**, 195-200, (1964)

J.S. Bell, *On the problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics.* Rev. Mod. Phys. **38**, 447-452 (1966)

J.S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics.* Cambridge University Press, (1987) [Contiene diversi lavori di Bell ristampati]

Interpretazione moderna del relismo locale

A. Leggett, *Nonlocal hidden-variable theories and quantum mechanics: an incompatibility theorem.* Found. Phys. 33, 1469–1493 (2003)

Prima derivazione di CHSH

J.F. Clauser; M.A. Horne; A. Shimony; R.A. Holt (1969), *Proposed experiment to test loca l hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett., 23 (15): 880–4

Prima verifica sperimentale violazione CHSH e lavoro recente anche sui loopholes

A. Aspect; P. Grangier; G. Roger (1982), *Experimental Realization of Einstein-Podolsky -Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*, Phys. Rev. Lett., 49 (2): 9

Hanson, R. et al. , *Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres.* Nature. **526**, 682–686 (2015)

Un punto di vista critico sull'intepretazione adottata dai fisici dei risultati di Bell

F. Laudisa, *Non-Local Realistic Theories and the Scope of the Bell Theorem.* Found. Phys. (2008) 38: 1110–1132