Valter Moretti
Dipartimento di Matematica
Facoltà di Scienze M.F.N
Università di Trento

TEORIA DELLA RELATIVITÀ SPECIALE: FORMULAZIONE MATEMATICA.

Con un'introduzione alla formulazione matematica della Relatività Generale.

Corso di *Mathematical Physics*
per le Lauree Magistrali in Matematica e in Fisica, Università di Trento

Scopi e Prerequisiti Matematici.

Il fine di queste dispense è quello di presentare una veste matematica rigorosa della struttura di base della Teoria della Relatività Speciale e introdurre le idee fondamentali della Teoria della Relatività Generale. Quindi l'accento non sarà posto sulla Fisica (che, almeno per quanto riguarda la meccanica classica deve essere già nota al lettore) ma sulla formalizzazione matematica rigorosa dei concetti fisici e sull'utilizzo di tecniche geometriche superiori.
Le dispense sono divise in 8 capitoli, esse riguardano la formulazione geometrico differenziale della teoria della relatività speciale nella sua forma fisicamente elementare e la struttura del gruppo di Lorentz. L'ultimo capitolo concerne l'introduzione di alcune idee matematiche che stanno alla base della Teoria della Relatività generale. In queste parti, prima verrà costruita ed esaminata a fondo, partendo dai postulati base di Einstein, la struttura causale dello spaziotempo (la struttura dei coni causali) esplicitandone il significato fisico. Verrà poi esaminata la cinematica della teoria della relatività studiandone (da un punto di vista superiore matematicamente parlando) alcuni aspetti classici quali la dilatazione degli intervalli di tempo e la contrazione delle lunghezze. Infine si passerà alla formulazione della dinamica mostrando come essa porti naturalmente al principio di equivalenza massa energia:

$$E = mc^2.$$

Nella stessa sede introdurremo la nozione di tensore energia-impulso.
I capitoli 6 e 7 riguardano essenzialmente la struttura topologica del gruppo di Lorentz e teoremi di fattorizzazione di tale gruppo esaminati dal punto di vista della teoria dei gruppi di Lie matriciali e del teorema di decomposizione polare in dimensione finita. In particolare, nel capitolo 6 daremo alcune nozioni di teoria dei gruppi di Lie con particolare riguardo ai gruppi di Lie matriciali, studiando come esempio la struttura del gruppo $O(3)$. Nel capitolo 7 studieremo la struttura del gruppo di Lorentz come gruppo di Lie matriciale e proveremo alcuni risultati di rappresentazione e decomposizione dei suoi elementi.
Nell'ultimo capitolo introdurremo il pricipio di equivalenza di Einstein e ne mostreremo il suo contenuto geometrico differenziale usando coordinate normali Riemanniane adattate a geodetiche di tipo tempo. Mostreremo come una definizione naturale di "presenza di gravità " in relatività (definita come presenza di accelerazione della deviazione geodetica) conduca naturalmente ad identificare la gravità con la curvatura (tensore di Riemann) dello spaziotempo. Successivamente introdurremo le equazioni di Einstein del campo gravitazionale.
Infine daremo la nozione generale di sistema di riferimento in relatività generale, discutendo le implicazioni di tale definizione in riferimento alla convenzionalità del processo di sincronizzazione di Einstein.

Dato che il corso è rivolto a studenti delle Lauree Magistrali (una volta dette Specialistiche) in Matematica e in Fisica ed a studenti di corsi di Dottorato di Ricerca, il livello della matematica usata non è elementare. I prerequisiti per poter comprendere appieno il contenuto di queste dispense consistono nel calcolo tensoriale (per es. vedi [1, 7]) e nella geometria differenziale delle varietà dotate di metrica (per es. vedi [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]). In particolare lo studente deve avere nozioni elementari di geometria affine [9] e delle associate strutture differenziabili e metriche. Richiami di tali nozioni sono dati in Appendice A e in Appendice B.

Ringraziamento. L'autore ringrazia L. Goller per avere segnalato alcuni errori di vario genere. L'autore ringrazia B. Cocciaro e T. Russo per rilevanti osservazioni concettuali e discussioni.

Indice

Capitolo 1

I principi fisici della Relatività Speciale.

In questo capitolo ci occuperemo di costruire la struttura spaziotemporale della Teoria della Relatività Speciale. Non seguiremo un approccio storico. La formulazione che presenteremo nel seguito della Teoria della Relatività Speciale è ben più avanzata *dal punto di vista matematico* della formulazione originale di Einstein del 1905 [11] pur conservandone il contenuto fisico. In particolare faremo uso della geometria differenziale fin da subito, cosa che Einstein non fece nella prima formulazione. La natura dello spaziotempo di varietà differenziabile con metrica iperbolico normale venne infatti riconosciuta e studiata, a partire da Minkowski, tra il 1905 e il 1916 anno della presentazione della Teoria della Relatività Generale da parte di Einstein. In quest'ultima a differenza della teoria Speciale, la struttura geometrico differenziale è l'elemento centrale.

1.1 La crisi della visione classica.

Alla fine del secolo XVII, quando le equazioni dell'elettromagnetismo ebbero forma completa nelle famose Equazioni di Maxwell, si comprese che l'invarianza galileiana discussa precedentemente non poteva essere estesa all'elettromagnetismo.
Le equazioni di Maxwell prevedono che, in assenza di sorgenti, il campo elettromagnetico si propaghi sotto forma di *onde elettromagnetiche* in conformità con l'equazione di D'Alembert

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\Psi}{\partial(x^i)^2}=0\,.$$

Nel nostro caso Ψ è una qualsiasi componente del campo elettrico o magnetico e t, x^1, x^2, x^3 sono coordinate cartesiane ortonormali associate ad un sistema di riferimento. In particolare si comprese, e questo fu uno dei trionfi della fisica del 1800, che la luce è un'onda elettromagnetica unificando la teoria dell'ottica con quella dell'elettromagnetismo. Dalla teoria delle equazioni di

D'Alembert risulta che il parametro c, che ha le dimensioni di una velocità, si deve interpretare come la velocità delle onde elettromagnetiche indipendentemente dalla direzione di propagazione nel sistema di riferimento considerato. La stessa teoria di Maxwell fornisce il valore di c, di circa 300.000 km/s in termini di grandezze elettrostatiche che possono essere misurate indipendentemente dal fenomeno di propagazione ondosa sopra descritto.
Il punto di contrasto con l'invarianza galileiana è però il seguente. È facile verificare per sostituzione diretta e assumendo che i campi considerati siano propriamente campi vettoriali in ogni spazio assoluto, che la forma dell'equazione di sopra *non* è invariante sotto cambiamento di sistema di riferimento quando la trasformazione di coordinate è un elemento del gruppo di Galileo. Le stesse equazioni di Maxwell da cui segue l'equazione delle onde di sopra non sono invarianti per trasformazioni di Galileo. L'idea più semplice che fu proposta per interpretare questo stato di cose è che l'equazione delle onde scritta valesse in realtà *solo* in un particolare sistema di riferimento detto sistema di riferimento dell'*etere*. Dal punto di vista fisico, tale sistema di riferimento avrebbe dovuto essere in quiete con il mezzo, appunto l'etere, in cui si propagherebbero le onde elettromagnetiche. Che il sistema di riferimento dell'etere fosse inerziale oppure no, sembrava comunque che l'elettromagnetismo, a differenza della meccanica, selezionasse un unico e particolare sistema di riferimento privilegiato. Si osservi che ciò ha ripercussione anche nella fisica dei corpi materiali, fino ad allora trattati dalla meccanica classica, perché le onde elettromagnetiche interagiscono sui corpi materiali che portano cariche o correnti elettriche, esercitando su di essi delle forze. Si noti che ciò non è comunque in contrasto con la descrizione spaziotemporale di base della meccanica classica che è indipendente dall'assunzione o meno dell'invarianza galileiana. Per tale motivo tale descrizione continuò ad essere usata.
Il contrasto sperimentale con le fondazioni stesse della descrizione spaziotemporale classica non tardò però ad arrivare. All'interno di tale formulazione, tenendo conto che un impulso luminoso deve essere pensato come un'onda elettromagnetica, che ha velocità c in un particolare riferimento, segue subito che la velocità dello stesso impulso deve essere differente se valutata in un altro sistema di riferimento. In quest'ordine di idee, è alquanto improbabile che la terra nel suo moto attorno al sole si trovi perennemente in quiete nel riferimento dell'etere, per cui ci si deve aspettare di poter valutare sulla terra una velocità della luce differente a seconda del momento. Ulteriormente, se la terra non fosse in quiete con l'etere, la velocità della luce non dovrebbe avere un comportamento isotropo come prescritto dall'equazione di D'Alembert, ma la velocità della luce dovrebbe dipendere dalla sua direzione rispetto alla direzione del moto della terra nel riferimento dell'etere. Valutando la velocità della luce sulla terra lungo due percorsi ortogonali posti in direzioni opportune, si dovrebbero misurare delle differenze di velocità lungo i due cammini.
Due celebri esperimenti di questo genere furono effettivamente eseguiti nel 1887 da Michelson e Morley [12]. Su un piano orizzontale che poteva orientarsi arbitrariamente attorno all'asse verticale, un raggio di luce partiva da una sorgente S e nel punto P, al centro del piano, veniva diviso in due raggi da uno specchio semiriflettente. Tali raggi percorrevano due percorsi rettilinei uguali ma reciprocamente ortogonali fino a raggiungere due specchi che li riflettevano indietro verso P. Da P venivano deflessi in S' dove un fine interferometro valutava l'eventuale ritardo relativo del tempo di arrivo dei due raggi nel punto finale di ricongiungimento. Il risultato degli

esperimenti, eseguiti con diverse modificazioni per valutare tutte le possibilità, fu totalmente negativo: nessuna differenza di tempi di arrivo e quindi di velocità venne misurata in qualunque periodo dell'anno pur orientando l'apparato in qualunque direzione. Questo fatto *sperimentale* è in diretto contrasto con la formulazione classica se si esclude la situazione altamente improbabile in cui la terra è sempre in quiete con l'etere.
Dal 1887 fino al 1905, anno in cui A. Einstein pubblicò il suo articolo intitolato "Sull' Elettrodinamica dei Corpi in Movimento" in cui vennero gettate le basi della Teoria della Relatività Speciale, varie proposte furono avanzate per spiegare il risultato negativo di Michelson e Morley; e per fare coesistere la meccanica con l'elettromagnetismo. Vennero proposte alcune teorie basate sul trascinamento parziale dell'etere da parte della terra assumendo completamente il corpus della meccanica classica, ma anche teorie più radicali che mettevano in discussione alcuni punti della formulazione della meccanica classica. Queste ultime vennero costruite anche da parte di valenti teorici tra cui spiccano i nomi di Lorentz e Poincaré[1]. Noi non ci occuperemo di tutte queste teorie e considereremo unicamente la Teoria della Relatività Speciale, che non solo spiega il risultato di Michelson e Morley (benché sembra che Einstein non fosse a conoscenza di tali esperimenti nel 1905), ma ha ricevuto tali e tante conferme sperimentali che è ritenuta sicuramente più vicina alla realtà fisica di quanto non lo fosse la descrizione classica (che ne è una approssimazione in particolari regimi di "basse velocità"). Basti dire che la Teoria della Relatività Speciale viene quotidianamente usata dalla tecnologia per produrre strumenti. Tenendo conto della Relatività Speciale vengono progettati gli acceleratori di particelle del CERN in cui le particelle non possono più essere trattate classicamente a causa delle loro altissime velocità relative (oltre che per la loro natura quantistica).

1.2 Lo Spaziotempo ed i sistemi di riferimento.

Un punto di vista sul mondo fisico che permise (ad Einstein) di uscire dalla crisi della visione classica, è quello basato sulla nozione di *evento* e di *spaziotempo*. Da questo punto di vista tutto ciò che accade o esiste deve essere decomponibile in *eventi*. In questo approccio, tutto ciò che accade deve ammettere una descrizione in termini di *relazioni* o *coincidenze* tra eventi. Un evento è la minima determinazione spaziotemporale possibile, individuata dall'assegnazione di tre coordinate spaziali ed una temporale. *Si deve sottolineare che ogni evento è un ente assoluto, cioè del tutto indipendente da ogni possibile osservatore o sistema di riferimento. Le coordinate spaziotemporali che vengono assegnate agli eventi sono invece dipendenti dall'osservatore o sistema di riferimento.* L'insieme degli eventi costituisce lo *spaziotempo*. Dal punto di vista fisico è naturale assumere, ed è stato tacitamente assunto nella formulazione della meccanica classica, che lo spaziotempo abbia una natura continua (cioè una topologia localmente omeomorfa a $\mathbb{R}^4$, di Hausdorff ed a base numerabile) e differenziabile (per potere impostare equazioni differenziali che determinano l'evoluzione dei sistemi fisici). Assumiamo quindi d'ora in poi che lo spazio-

[1]Poincaré presentò una teoria molto simile alla teoria della Relatività di Einstein con sottili differenze dal punto di vista filosofico basate sul suo punto di vista *convenzionalista*. Il dibattito sulla differenza tra la teoria di Poincaré e quella di Einstein è tuttora acceso ed aperto, vedi [13].

tempo sia una *varietà differenziabile a* 4 *dimensioni* che indicheremo con M^4.
In questo approccio, i sistemi di riferimento sono pensabili, in termini del tutto generali, come procedure fisiche per decomporre lo spaziotempo in spazio e tempo, assegnare cioè determinazioni spaziali e determinazione temporale ad ogni evento dello spaziotempo. Assumeremo pertanto che, in termini del tutto generali, *un sistema di riferimento $\mathscr{F}$ nello spaziotempo M^4 sia dato assegnando uno spazio euclideo tridimensionale reale $\mathbb{E}^3_{\mathscr{F}}$ detto spazio di quiete di $\mathscr{F}$ (con funzione distanza $d_{\mathscr{F}}$) ed un diffeomorfismo (cioè, quindi una corrispondenza biunivoca differenziabile con inversa differenziabile)*

$$\Phi_{\mathscr{F}} : M^4 \ni x \to (t_{\mathscr{F}}(x), P_{\mathscr{F}}(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{E}^3_{\mathscr{F}}$$

dove $x \mapsto t_{\mathscr{F}}(x)$ è detta (funzione) coordinata temporale di $\mathscr{F}$.
Lo spazio di quiete di un riferimento $\mathbb{E}^3_{\mathscr{F}}$ corrisponde dunque allo spazio fisico tridimensionale euclideo in quiete con un laboratorio nel quale si eseguono esperimenti. La coordinata temporale corrisponde al tempo letto su orologi ideali posti in quiete in tutti i punti di tale spazio e preventivamente sincronizzati con qualche procedura che discuteremo successivamente.
Più avanti, una volta introdotti e discussi gli assiomi della Relatività, daremo una definizione formale di sistema di riferimento specializzata alla situazione relativistica, ma compatibile con l'idea euristica generale data sopra.
Dal punto di vista fisico dobbiamo assumere che per definire i sistemi di riferimento si siano definiti una classe di *regoli rigidi ideali* ed una classe di *orologi ideali*. L'idealità dei regoli significa che scelti due regoli arbitrariamente, essi risultano di uguale lunghezza se sono in quiete nello stesso posto in un arbitrario riferimento inerziale e che tale fatto permane anche dopo che i regoli hanno subito diverse storie (incluse accelerazioni), una volta riportati in quiete relativa in un arbitrario riferimento inerziale (anche diverso dal primo). Lo stesso criterio si applica per la nozione di idealità di orologi: presi due orologi essi risultano battere il tempo nello stesso modo quando sono in quiete nello stesso posto in un riferimento inerziale e tale fatto permane anche dopo che gli orologi hanno subito diverse storie, una volta riportati in quiete relativa in un riferimento inerziale (anche diverso dal primo). Si noti che al secondo incontro gli orologi possono non risultare sincronizzati anche se erano stati sincronizzati al primo incontro. I regoli ideali servono a definire la distanza usata nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3_{\mathscr{F}}$, gli orologi ideali servono a definire le misure di intervalli di tempo $t_{\mathscr{F}}$ del riferimento.
Esistono in natura orologi ideali? la risposta è positiva. Gli stessi atomi sono dei piccoli orologi nel senso che, con le dovute precisazioni fisiche, emettono radiazione con frequenze determinate il cui periodo può essere usato come il periodo di un orologio. Tali orologi, si sono rivelati la migliore approssimazione di orologi ideali disponibile in natura.
Lo spaziotempo classico e, come vedremo, quello relativistico, ammette dunque strutture di carattere metrico, corrispondenti all'esistenza di strumenti di misura fisici corrispondenti, oltre alla struttura topologica e quella differenziabile. L'introduzione dei sistemi di riferimento nel senso precisato sopra, implica che ci siano anche strutture metriche di tue tipi apparentemente distinti, corrispondenti alle misurazioni di "intervalli di tempo" e le misurazioni di "intervalli di spazio" tra coppie di eventi eseguite in ogni possibile sistema di riferimento.
In meccanica classica queste misure di spazio e di tempo tra due eventi fissati sono, come ben

noto, *assolute*: ciò significa che esse non dipendono dal *sistema di riferimento*. Sappiamo infatti che, per esempio, l'intervallo di tempo tra due eventi, come la produzione ed il decadimento di una particella, non dipende dal riferimento in cui si esegue la misura. Similmente la distanza spaziale tra due eventi contemporanei non dipende nuovamente dal riferimento. Precisiamo qualche dettaglio su quanto abbiamo appena detto.
Per quanto riguarda la coordinata temporale dei vari riferimenti, in meccanica classica esiste una richiesta basta su apparenti evidenze sperimentali che precisa che, a meno di costanti additive (corrispondenti alla possibilità di cambiare l'origine del tempo separatamente per ogni riferimento): $t_{\mathscr{F}} = t_{\mathscr{F}'}$ per ogni coppia di sistemi di riferimento $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$. Tale richiesta cade solitamente sotto il nome di *assioma del tempo assoluto*. Il tempo assoluto è dunque una funzione $T : M^4 \to \mathbb{R}$ definita a meno di costanti additive che si identifica, in fisica classica, con la coordinata temporale di ogni sistema di riferimento.
Sempre in meccanica classica, gli spazi di quiete dei vari riferimenti si identificano tutti, ad ogni fissato tempo (assoluto!) t con l'ipersuperficie dello spaziotempo $\Sigma_t = \{p \in M^4 \mid T(p) = t\}$ che si pensa essere dotata di struttura di spazio euclideo tridimensionale. Ogni Σ_t è quindi, per ipotesi, uno spazio euclideo tridimensionale, detto *spazio assoluto al tempo* t. Si assume che tutte le misure di distanze ed angoli tra due eventi $p, p' \in \Sigma_t$ eseguite in differenti sistemi di riferimento doincidono con le misure assolute rispetto alla struttura metrica di Σ_t. Questa richiesta cade usualmente sotto il nome di *assioma dello spazio assoluto*.
Come vedremo tra poco la rivoluzione della Relatività ha mostrato, basandosi sulle evidenze sperimentali citate nella precedente sezione, che le strutture metriche spaziali e temporali sono invece *relative al sistema di riferimento*, ma al contempo sono parti di una struttura metrica spaziotemporale *assoluta* che ha particolari proprietà di simmetria (almeno fino a quando si trascura la descrizione relativistica dell'interazione gravitazionale) descritte dal cosiddetto *gruppo di Poincaré* (che include il *gruppo di Lorentz*). La geometria dello spaziotempo che ne consegue si è rivelata il linguaggio matematico per poter trattare di argomenti profondamente fisici come la nozione di causalità.

Commenti 1.1.
(1) Le implicazioni del nuovo punto di vista relativistico, in cui si introdice una geometria dello spaziotempo, sono state incredibilmente feconde dal punto di vista fisico ed hanno avuto influenze fondamentali nello sviluppo di tutta la fisica del 1900. La teoria della relatività ha costruito, insieme alla meccanica quantistica, il *linguaggio stesso* ed il *paradigma* della fisica teorica di un secolo intero di ricerca.
(2) È noto da molti anni che la struttura spaziotemporale come varietà differenziabile quadridimensionale non è completamente adeguata a descrivere tutti i fenomeni fisici osservati in natura. Per ciò che riguarda i cosiddetti sistemi fisici quantistici, una descrizione molto più adeguata delle loro proprietà fisiche non viene data in una varietà differenziabile, ma in uno spazio di Hilbert complesso infinito dimensionale. In realtà le due strutture sono entrambe necessarie.
Da questo punto di vista i metodi ed il linguaggio della geometria (differenziale in particolare) e dell'analisi funzionale degli spazi di Hilbert sono entrati nella struttura delle teorie fisiche moderne come parte centrale. A titolo di esempio si può ricordare che la nozione di particella nelle

teorie quantistiche relativistiche viene data in termini di rappresentazioni unitarie irriducibili del gruppo (di Lie) di Lorentz.
(3) Si specula molto sulla eventuale natura non continua, o comunque non descritta da una varietà di dimensione 4, dello spaziotempo stesso a scale molto piccole: le scale di Planck $\sim 10^{-33}$cm e 10^{-43}s alle quali dovrebbe apparire qualche teoria quantistica dello spaziotempo. Esistono differenti proposte: la *teoria delle stringhe* nelle sue differenti varianti, la *loop quantum gravity* e approcci vari basati sulla *geometria non commutativa.* È tuttavia importante precisare che recenti osservazioni sperimentali eseguite con il telescopio spaziale "Fermi Gamma-ray", riguardanti i cosiddetti γ-bursts, hanno abbassato la soglia per l'esistenza di fenomeni di quantum gravity (come la violazione della simmetria di Lorentz) ben sotto la scala di Planck[2].

1.2.1 Il problema della sincronizzazione.

La nozione di coordinata temporale $t_{\mathscr{F}}$ di un fissato sistema di riferimento $\mathscr{F}$ introdotta sopra, in assenza dell'assioma classico del tempo assoluto, richiede ulteriori precisazioni. Come accennato sopra, la procedura fisica per definire la nozione di coordinata temporale di un riferimento è quella di porre un orologio ideale in quiete in ogni punto dello spazio di quiete del riferimento e quindi *sincronizzare a distanza* tutti questi orologi, cioè scegliere, con un fissato criterio, l'origine del tempo per ciascun orologio, lavorando su coppie arbitrarie di orologi. Il tempo segnato dall'orologio quando si trova in un evento, definisce il tempo in cui avviene quell'evento nel riferimento considerato.
Le richieste fisiche sulla nozione di sincronizzazione sono che:

(a) deve *permanere nel tempo* una volta imposta su una coppia di orologi,

(b) deve essere una proprietà *transitiva* (se A è sincronizzato con B e B lo è con C allora A è sincronizzato con C), *simmetrica* (se A è sincronizzato con B allora B è sincronizzato con A) e *riflessiva* (ogni orologio A è sincronizzato con se stesso).

A priori, si possono immaginare alcune procedure per sincronizzare due orologi in quiete nei punti distinti P e Q di $\mathbb{E}^3_{\mathscr{F}}$, esaminiamone 3:

(1) prendiamo l'orologio in Q, portiamolo in P, sincronizziamolo con l'orologio in P e riportiamolo in Q;

(2) prendiamo un terzo orologio $\mathcal{O}$ in moto senza accelerazione rispetto a $\mathscr{F}$ sull'asse contenente il segmento PQ. Quando l'orologio $\mathcal{O}$ passa per P lo sincronizziamo con quello fermo in tale punto. Successivamente sincronizziamo l'orologio in Q con $\mathcal{O}$ non appena quest'ultimo passa per Q;

(3) lanciamo verso Q un segnale di velocità nota in $\mathscr{F}$ dall'orologio in P. Quindi sincronizziamo l'orologio in Q con quello in P tenendo conto della distanza tra P e Q e del tempo impiegato dal segnale a raggiungere Q.

Nella fisica classica si assume che esista il cosiddetto *tempo assoluto*: una funzione $T : M^4 \to \mathbb{R}$, definita a meno di una costante additiva, che assegna ad ogni evento il suo tempo e che viene misurato, a meno di una costante additiva corrispondente alla scelta dell'origine del tempo

[2]A. A. Abdo ed al. *A limit on the variation of the speed of light arising from quantum gravity effects.* Nature 462, 331-334 (19 November 2009).

per l'orologio in questione, da ogni orologio ideale. *È chiaro che, in fisica classica, l'ipotesi di esistenza del tempo assoluto misurato dagli orologi ideali implica immediatamente che queste procedure di sincronizzazione siano tutte equivalenti.* Tuttavia dato che *non* vogliamo ripristinare lo schema classico che sappiamo non essere in accordo con i fatti, non possiamo assumere a priori che i tre processi di sincronizzazione descritti sopra (e anche altri possibili) soddisfino nella pratica (a) e (b) e, se lo fanno, diano luogo alla stessa relazione di sincronizzazione (orologi sincronizzati con un criterio riusltano anche essere sincronizzati con un altra procedura).
Spendiamo qualche parola sui tre processi descritti.
Nel caso (1) ci potrebbe essere il problema, ammettendo che $\mathscr{F}$ sia inerziale, che nello spostare l'orologio da Q a P con accelerazione iniziale e decelerazione finale, si possa alterare il meccanismo di funzionamento dell'orologio a causa delle forze interne che si sviluppano[3]. Si può supporre come di fatto accade con orologi "ben fatti" che i problemi insorgano durante le fasi di accelerazione (e decelerazione), ma che gli orologi continuino a segnare il tempo nello stesso modo (ciò ha senso confrontando coppie di orologi) una volta terminata la fase di accelerazione dopo un certo tempo di rilassamento. Questo fatto però rende problematica la procedura di sincronizzazione che tiene conto di ciò che accade anche durante la fase di accelerazione. Senza un modello preciso del funzionamento degli orologi coinvolti tale procedura sembra problematica perché dipende pesantemente dal tipo di orologio. Si pensi al caso limite di un orologio elementare dato da un pendolo isocrono immerso in un campo gravitazionale: il periodo delle piccole oscillazioni cambia se la struttura a cui è appeso il pendolo è accelerata. In ogni caso sappiamo che con orologi ben fatti in regimi, a posteriori, chiamiamo *non relativistici*, non insorgono problemi gravi, per cui questo metodo potrebbe funzionare per una classe di orologi. Bisognerebbe verificare sperimentalmente che (a) e (b) siano valide.
Il caso (2), lavorando con un orologio in moto inerziale evita il problema di tenere conto degli eventuali problemi dovuti alle accelerazioni, ma assume che le differenze di velocità di orologi sincronizzati nello stesso posto non abbiano rilevanza fisica, anche questo fatto non è ovvio. Questo criterio permette in realtà di sicronizzare orologi in moto relativo e si può provare che, con qualche altra ipotesi di carattere matematico, il criterio (2), *se soddisfa davvero (a) e (b)*, porta direttamente alla formulazione classica dello spaziotempo.
Il metodo (3) richiede altre informazioni per poter essere usato. Per poter conoscere la velocità del segnale, bisogna misurarla e per fare ciò bisognerebbe avere già sincronizzato a distanza una coppia di orologi. Pertanto il valore della velocità del segnale deve essere noto per altra via che non sia la stessa procedura di sincronizzazione. Tale velocità può inoltre dipendere dal moto del riferimento rispetto al mezzo in cui si propaga il segnale (ciò può anche dare luogo ad anisotropia).
Queste tre procedure (ma se ne possono immaginare altre) possono essere usate per sincronizzare

[3]Stiamo parlando in termini di forze ed accelerazioni che sono definite nello schema classico e ció sembra incoerente con il discorso generale. Si osservi tuttavia che dal punto di vista sperimentale la fisica classica funziona eccezionalmente bene quando le velocità in gioco sono piccole rispetto a quelle della luce. Assumendo di spostare gli orologi con piccolissime accelerazioni e piccolissime velocità, si può ritenere valido lo schema classico. Questa approssimazione è in realtà un utilissimo principio guida che deve essere soddisfatto dalla fisica relativistica: tutte le leggi relativistiche devono ridursi a quelle classiche nel limite di piccole velocità.

orologi purché sperimentalmente si verifichi che (a) e (b) siano davvero soddisfatte.

1.3 I postulati fisici fondamentali della Relatività Speciale.

La Teoria della Relatività Speciale si basa su due o tre (a volte quattro) postulati fisici a seconda dei punti di vista. Noi useremo tre postulati che elenchiamo nel seguito, con alcuni commenti.

1.3.1 Costanza della velocità della luce.

La scelta del criterio di sincronizzazione adottato da Einstein per formulare la Teoria della Relatività Speciale è il (3) facendo uso di segnali di luce, una volta misurata la velocità della luce su un percorso chiuso, procedura *che non necessita di due orologi precedentemente sincronizzati*. Questa scelta viene fatta enunciando un corrispondente principio.

RS1. Costanza della velocità della luce. *Esistono sistemi di riferimento in cui, con una corrispondente procedura di sincronizzazione a distanza, la velocità della luce nel vuoto assume lo stesso valore, indipendente dalla direzione di propagazione e dal riferimento.*

Commenti 1.2.
(1) Parte del contenuto fisico del postulato è proprio la richiesta che la procedura di sincronizzazione (3), usando la luce come mezzo fisico per sincronizzare, soddisfi le condizioni (a) e (b). Il postulato di Einstein implica però anche che la velocità della luce misurata su *cammini percorsi prima in una direazione e poi in quella opposta ritornando al punto di partenza*, in quiete con i sistemi di riferimento citati nel postulato, sia costante ed *indipendente dal riferimento*. Questo è un fatto testabile sperimentalmente indipendentemente dalla procedura di sincronizzazione perché necessita di un unico orologio, e tale invarianza è stata verificata sperimentalmente molte volte con esperimenti del tipo di quelli Michelson-Morley (vedi per es. [14]), anche considerando sistemi di riferimento non inerziali (come la terra). Il valore della velocità della luce da usare nella procedura di sincronizzazione di Einstein è dunque fornito indipendentemente dalla procedura stessa come deve essere e il postulato **RS1** precisa implicitamente come valutarla.
(2) Riguardo alla validità sperimentale delle condizioni (a) e (b) possiamo dire qualcosa di più preciso. Sperimentalmente si vede che la nozione di sincronizzazione in **RS1** permane nel tempo una volta imposta. Inoltre, la proprietà di riflessività è verificata banalmente, *mentre quella di simmetria e transitività seguono dall'evidenza sperimentale dell'invarianza della velocità della luce misurata su percorsi chiusi* nei sistemi di riferimento inerziali (lasciamo la prova al lettore). In realtà si può provare, ma la procedura non è semplice, che la condizione (a) è anch'essa soddisfatta come conseguenza teorica del fatto che la velocità della luce sia invariante se valutata su percorsi chiusi[4].

[4]Attenzione che un percorso chiuso generico è più generale del percorso chiuso ottenuto percorrendo un cammino prima in una direzione e poi nell'altra per tornare al punto di partenza, per cui stiamo qui assumendo la validità di un fatto fisico più generale di quello indicato nel punto (1).

(3) È importante notare che, a priori, possono esserci e di fatto ci sono, altre procedure di sincronizzazione differenti da quella a cui **RS1** si riferisce, che siano e sono ugualmente fisicamente sensate: soddisfano (a) e (b) e implicano l'invarianza della velocità della luce valutata su percorsi chiusi che, come detto, è un fatto fisico sperimentalmente accertato. Tali nozioni portano ad una descrizione *alternativa* a quella della Relatività Speciale [15]. Può accadere che una tale procedura alternativa sia completamente equivalente a quella di Einstein: due orologi in quiete sincronizzati con la procedura di Einstein lo sono anche rispetto ad un'altra procedura, anche se attuata in modo differente. Un esempio è la procedura (1) descritta precedentemente se eseguita con orologi in moto lentissimo (pur di stabilitire il significato di "lentissimo" indipendentemente da una procedura di sincronizzazione). Oppure può anche accadere che una differente procedura di sincronizzazione sia fisicamente ammissibile (soddisfi (a) e (b) e implichi l'invarianza della velocità della luce valutata su percorsi chiusi), ma non sia equivalente a quella di Einstein: due orologi in quiete sincronizzati con la procedura di Einstein non lo sono rispetto ad un'altra procedura fisicamente ammissibile. In ogni caso, una volta costruita la teoria adottando la procedura di sincronizzazione di Einstein, le altre procedure di sincronizzazione equivalenti o alternative devono potere essere modellizzate all'interno della teoria costruita, cioè nello spaziotempo ed usando il linguaggio geometrico adeguato. Torneremo su questo punto discutendo la nozione di sistema di riferimento in Relatività Generale nel capitolo 8.
(4) Nel formulare **RS1** è sottinteso che si è fatta una scelta delle unità di misura di tempo e spazio per tutti i riferimenti in questione. Tali unità di misura possono essere alterate, soddisfacendo ancora **RS1**, moltiplicando unità di tempo e di spazio per uno stesso fattore, eventualmente diverso per ogni riferimento.

1.3.2 Principio d'inerzia.

Il principio successivo riguarda i sistemi di riferimento inerziali. Una volta assunta la definizione di sistema di riferimento data precedentemente, essi sono individuati esattamente come nel caso classico in relazione al moto dei corpi isolati. L'idea di fondo è di studiare il moto dei corpi quando sono posti a distanza molto grande dagli altri corpi dell'universo. La nostra idealizzazione di corpo sarà quella del *punto materiale*, cioè un corpo fisico la cui struttura interna non sia rilevante e la cui evoluzione spaziotemporale sia descrivibile da una linea di universo.
È chiaro che avendo a disposizione un unico punto materiale nell'universo non hanno alcun senso fisico proposizioni riguardanti il suo stato di moto in quanto questo dipende dalla scelta del riferimento e può essere fissato arbitrariamente scegliendo opportunamente il riferimento. Se consideriamo invece un insieme di più punti materiali, in generale non è possibile trovare un riferimento in cui poter assegnare, rispetto ad esso, uno stato di moto scelto a piacimento a ciascuno dei punti materiali contemporaneamente. Il *Principio d'inerzia* o dichiara in particolare cosa succede quando allontaniamo a distanze grandissime un numero arbitrario di punti materiali, reciprocamente e dagli altri corpi dell'universo. Punti materiali che soddisfano tale requisito di "lontananza" sono detti *isolati.* Proprio perché non è in generale possibile fissare lo stato di moto di tanti punti materiali contemporaneamente mediate una scelta opportuna

del riferimento, il postulato d'inerzia ha un contenuto fisico altamente non banale: esso afferma che esistano riferimenti in cui tutti i corpi isolati sono in moto a velocità costante (di valore dipendente dal corpo considerato)

RS2. Principio d'inerzia. *La classe dei sistemi di riferimento in* **RS1** *coincide con quella dei* **sistemi di riferimento inerziali** *individuati dalla richiesta che, rispetto ad ognuno di essi,* tutti *i punti materiali isolati si muovano a velocità costante.*

Commenti 1.3.
(1) Assumeremo che la nozione di punto materiale isolato sia *assoluta*, cioé indipendente dal riferimento: se un punto è isolato in un riferimento lo deve essere in tutti gli altri.
(2) Come in fisica classica si assume di poter disporre di un punto materiale isolato in ogni evento dello spaziotempo (per un intervallo temporale piccolo ma finito) e con velocità arbitrariamente scelta in direzione e modulo variabile dal valore zero fino ad almeno il valore della velocità della luce.

1.3.3 Principio di Relatività.

L'ultimo principio di Einstein concerne l'estensione del principio di relatività galileiano a tutta la fisica, inclusi i fenomeni elettromagnetici.

RS3. Principio di Relatività. *Le leggi della fisica assumono la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale.*

Nota 1.1. Il principio implica che non sia in alcun modo possibile privilegiare un sistema di riferimento nella classe dei sistemi di riferimento inerziali tramite i risultati di esperimenti di fisica, dato che possiamo riprodurre il risultato di un esperimento ottenuto in un certo sistema di riferimento, in un qualsiasi altro sistema di riferimento preparando nello stesso modo l'apparato sperimentale.

Capitolo 2

I gruppi di Lorentz e di Poincaré.

2.1 Dai postulati della Relatività speciale al gruppo di Poincaré.

Quello che ora vogliamo fare in questa sezione è determinare la legge di trasformazione tra le coordinate cartesiane ortonormali solidali con due differenti sistemi di riferimento inerziali. Ciò sarà fatto usando i principi **RS1** e **RS2** più altre ipotesi di carattere matematico o fisico matematico che enunceremo quando necessarie.

Nota 2.1. *D'ora in poi il valore universale della velocità della luce sarà indicato con* c*.*

Definiamo preventivamente dei sistemi di coordinate che ci saranno utili in tutto il seguito. Consideriamo un sistema di riferimento $\mathscr{F}$ in M^4. Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortonormali

$$\psi_{\mathscr{F}} : \mathbb{E}^3_{\mathscr{F}} \ni P \mapsto (x^1(P), x^2(P), x^3(P)) = X(P) \in \mathbb{R}^3$$

nello spazio di quiete $\mathbb{E}^3_{\mathscr{F}}$ di $\mathscr{F}$ ed una costante $t_0 \in \mathbb{R}$ delle dimensioni di un tempo. *Il sistema di coordinate globali indotto su* M^4

$$\Psi_{\mathscr{F}} : M^4 \ni x \mapsto (ct(x) + ct_0, \psi_{\mathscr{F}}(P_{\mathscr{F}}(x))) \ .$$

è detto sistema di coordinate minkowskiane solidali con $\mathscr{F}$*.*

Consideriamo un riferimento inerziale $\mathscr{F}$. In coordinate minkowskiane associate a $\mathscr{F}$, l'evoluzione di un punto materiale sarà descritta in tali coordinate da 4 funzioni differenziabili

$$x^i = x^i(u) \quad \text{i=0,1,2,3},$$

dove $u \in (a, b)$ è un qualsiasi parametro che soddisfa $dx^0/du \neq 0$ per ogni punto $u \in (a, b)$. D'ora in poi le lettere latine usate per denotare un indice potranno assumere tutti i valori $0, 1, 2, 3$, mentre gli indici greci potranno assumere solo i valori $1, 2, 3$. La velocità del punto materiale rispetto a $\mathscr{F}$ avrà componenti

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} = c\frac{\frac{dx^\alpha}{du}}{\frac{dx^0}{du}} \ . \tag{2.1}$$

Si osservi che la definizione è indipendente dalla sclta del parametro u, se la curva viene riparametrizzata con un nuovo parametro u' che soddisfi $du'/du > 0$. Il modulo quadro della velocità in $\mathscr{F}$ vale

$$v^2 = c^2 \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{(U^\alpha)^2}{(U^0)^2} \quad \text{dove } U^i := \tfrac{dx^i}{du} \,. \tag{2.2}$$

La teoria si deve ridurre a quella classica per piccole velocità in cui tutte le velocità sono ammissibili. Di conseguenza assumeremo che l'insieme $\mathcal{C}_{x,\mathcal{F}}$ dei vettori tangenti nell'evento x alle linee di universo di punti materiali passanti per tale evento includa i vettori di T_xM associati a moti con velocità sufficientemente piccole in $\mathscr{F}$ ed in ogni direzione. In virtù di (2.2) $\mathcal{C}_{x,\mathcal{F}}$ dovrà includere un *cono aperto* con asse attorno all'asse $U^\alpha = 0$. In altre parole, per qualche costante $v_0 > 0$ delle dimensioni di una velocità,

$$\left\{ U \in T_xM^4 \;\middle|\; 0 < \sum_{\alpha=1}^{3}(U^\alpha)^2 < \frac{v_0^2}{c^2}(U^0)^2 \right\} \subset \mathcal{C}_{x,\mathcal{F}} \quad \text{dove } U^i := \tfrac{dx^i}{du} \,. \tag{2.3}$$

D'altra devono essere ammissibili i moti alla velocità della luce in ogni direzione. Di conseguenza ci aspettiamo che tutte le velocità fino a quella della luce siano ammissibili per cui

$$\left\{ U \in T_xM^4 \;\middle|\; 0 < \sum_{\alpha=1}^{3}(U^\alpha)^2 \leq (U^0)^2 \right\} \subset \mathcal{C}_{x,\mathcal{F}} \quad \text{dove } U^i := \tfrac{dx^i}{du} \,. \tag{2.4}$$

2.1.1 Postulati della Relatività trascritti in sistemi di coordinate minkowskiane.

Vogliamo ora dare una veste matematica ai postulati della relatività nel linguaggio dei sistemi di coordinate minkowskiane con il fine ultimo di determinare la più generale legge di trasformazione tra le coordinate Minkowskiane associate a due generici sistemi di riferimento inerziali. Ci concentriamo inizialmente sul caso di punto materiale che evolva con velocità costante ossia il moto sia rettilineo uniforme. Questo perché il principio d'inenrzia impone che i punti materiali isolati si muovano a velocità costante in ongi sistema di riferimento inerziale. Ci interesseremo poi al caso importante in cui il punto materiale sia una particella di luce.
Per cominciare diamo una caratterizzazione matematica generale del moto uniforme in termini di derivate prime e seconde delle componenti della curva che descrive il moto del punto nello spaziotempo, in riferimento ad un sistema di riferimento inerziale e tenendo conto della richiesta $dx^0/du \neq 0$.
Risulta subito che condizione necessaria e sufficiente affinché il moto sia rettilineo uniforme rispetto a $\mathscr{F}$ è che, per ogni i,

$$\frac{\frac{dx^i}{du}}{\frac{dx^0}{du}} = \text{costante} \,.$$

Ciò equivale a dire che le derivate in u di tutti i rapporti di sopra sono nulle in (a, b). Calcoliamo esplicitamente le derivate di tali rapporti:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\frac{dx^i}{du}}{\frac{dx^0}{du}}\right) = \left(\frac{dx^0}{du}\right)^{-2}\left(\frac{d^2x^i}{du^2}\frac{dx^0}{du} - \frac{d^2x^0}{du^2}\frac{dx^i}{du}\right). \tag{2.5}$$

Si tenga conto che $dx^0/du \neq 0$ per ipotesi, inoltre se il moto è rettilineo uniforme per $u \in (a, b)$, vale $dx^j/du = c^j dx^0/du$ per certe costanti c^j. Se $c^j \neq 0$, allora $dx^0/du = (c^j)^{-1}dx^j/du$ ed il fatto che il moto sia rettilineo uniforme per $u \in (a, b)$, ossia si annulli il primo membro di (2.5), implica subito:

$$\frac{d^2x^i}{du^2}\frac{dx^j}{du} - \frac{d^2x^j}{du^2}\frac{dx^i}{du} = 0 \quad \text{per ogni } u \in (a, b).$$

Se il moto è rettilineo uniforme e $c^j = 0$ allora $dx^j/du = 0$ su (a, b) perché $dx^j/du = c^j dx^0/du$. In tal caso l'identità di sopra vale banalmente un'altra volta. Quindi, se il moto è rettilineo uniforme per $u \in (a, b)$ allora

$$\frac{d^2x^i}{du^2}\frac{dx^j}{du} - \frac{d^2x^j}{du^2}\frac{dx^i}{du} = 0 \quad \text{per ogni } u \in (a, b) \text{ e } i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Se viceversa valgono le identità di sopra allora ponendo $j = 0$ e dividendo per $(dx^0/du)^2 \neq 0$ si ha che

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\frac{dx^i}{du}}{\frac{dx^0}{du}}\right) = 0$$

su (a, b) per cui il moto è rettilineo uniforme. In definitiva: *il moto è rettilineo uniforme nel riferimento inerziale* $\mathscr{F}$ *se e solo se*

$$\frac{d^2x^i}{du^2}\frac{dx^j}{du} - \frac{d^2x^j}{du^2}\frac{dx^i}{du} = 0 \quad \text{per ogni } u \in (a, b) \text{ e } i, j = 0, 1, 2, 3. \tag{2.6}$$

Sempre nell'ottica di scrivere nel linguaggio delle coordinate i postulati di Einstein, vediamo ora come scrivere che la velocità di un punto materiale considerato ha modulo pari a c. Se teniamo conto della (2.2) e introduciamo la matrice η di coefficienti

$$\eta := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

la condizione $v^2 = c^2$ si riscrive equivalentemente, *dove, d'ora in poi, è sottintesa la somma sugli indici ripetuti,*

$$\eta_{ij}\frac{dx^i}{du}\frac{dx^j}{du} = 0\,. \tag{2.8}$$

Consideriamo ora un secondo sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}'$ con coordinate minkowskiane y^0, y^1, y^2, y^3. Data la natura di varietà dello spaziotempo, i due sistemi di coordinate saranno legati da una trasformazione biettiva da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ differenziabile, con inversa differenziabile che formalmente esprimeremo come

$$y^i = y^i(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \text{dove } (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4 \text{ e } i = 0, 1, 2, 3.$$

Dato che la nozione di punto materiale isolato non dipende dal riferimento e che abbiamo assunto di poter disporre di punti materiali isolati in ogni luogo e tempo (per intervalli di tempo piccoli ma finiti) con velocità arbitrarie (almeno nei limiti detti sopra), il moto rettilineo uniforme di un punto materiale in un riferimento inerziale può sempre essere pensato come dovuto al fatto che il punto materiale è isolato. Concludiamo che il moto rettilineo uniforme di un punto materiale in un riferimento inerziale deve essere descritto come moto rettilineo uniforme in ogni altro sistema di riferimento inerziale In particolare ciò si applica anche per moti alla velocità della luce che possono sempre pensarsi come propri di segnali luminosi.
Assumeremo che la classe di parametrizzazioni della curva $x^i = x^i(u)$ che descrive la storia del punto nel riferimento $\mathscr{F}$, che permette di esprimere la velocità del punto tramite la definzione (2.1) in quanto con $dx^0/du \neq 0$, sia una buona classe di parametrizzazioni per descrivere la storia dello stesso punto materiale anche nelle coordinate di $\mathscr{F}'$, $y^i = y^i(u)$. Assumertemo cioè che risulti ancora $dy^0/du \neq 0$ e quindi la velocità in $\mathscr{F}'$ sia ancora esprimibile con la (2.1) usando le coordinate y^i invece che le x^i.

Abbiamo allora la seguente coppia di richieste sulla trasformazione

$$y^i = y^i(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \text{dove } (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4 \text{ e } i = 0, 1, 2, 3.$$

(a) *in virtù di* **RS2** *il moto di un punto materiale con linea di universo $\rho : u \mapsto M^4$ appare rettilineo uniforme in $\mathscr{F}'$ (per un certo intervallo di tempo) se appare rettilineo uniforme in $\mathscr{F}$ (per un corrispondente intervallo di tempo), ovvero*

$$\frac{d^2y^i}{du^2}\frac{dy^j}{du} - \frac{d^2y^j}{du^2}\frac{dy^i}{du} = 0 \quad se \quad \frac{d^2x^i}{du^2}\frac{dx^j}{du} - \frac{d^2x^j}{du^2}\frac{dx^i}{du} = 0 \tag{2.9}$$

dove la linea di universo ρ è rappresentata in coordiniate minkowskiane di $\mathscr{F}$ con le funzioni differenziabili $x^i = x^i(u)$, soggette al vincolo (2.4) in ogni evento attraversato, e in quelle di $\mathscr{F}'$ con le funzioni differenziabili $y^i = y^i(u)$, $i = 0, 1, 2, 3$;

(b) *in particolare, in virtù di* **RS1**, *un punto materiale con linea di universo $\rho : u \mapsto M^4$ si muove alla velocità della luce in $\mathscr{F}'$ se si muove alla velocità della luce in $\mathscr{F}$. Ovvero*

$$\eta_{ij}\frac{dy^i}{du}\frac{dy^j}{du} = 0 \quad se \quad \eta_{ij}\frac{dx^i}{du}\frac{dx^j}{du} = 0\,, \tag{2.10}$$

dove la linea di universo ρ è rappresentata in coordiniate minkowskiane di $\mathscr{F}$ con le funzioni differenziabili $x^i = x^i(u)$, soggette al vincolo (2.4) in ogni evento attraversato, e in quelle di $\mathscr{F}'$ con le funzioni differenziabili $y^i = y^i(u)$, $i = 0, 1, 2, 3$.

2.1.2 Determinazione delle trasformazioni di coordinate tra riferimenti inerziali.

Il problema iniziale si riduce a quello di voler determinare la più generale trasformazione biettiva da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$ differenziabile

$$y^i = y^i(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \text{dove } (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4 \text{ e } i = 0, 1, 2, 3,$$

tale che soddisfi (a) e (b) di sopra per ogni scelta della curva di universo ρ usata in (a) e (b) con le richieste ivi fatte. Ora passeremo a trarre due utili conseguenze matematiche di (a) e (b) che determineranno la soluzione generale del problema.

Trattamento di (a). Essendo

$$y^i(u) = y^i(x^0(u), x^1(u), x^2(u), x^3(u)) \,,$$

valgono le identità

$$\begin{aligned} \frac{d^2y^i}{du^2}\frac{dy^j}{du} - \frac{d^2y^j}{du^2}\frac{dy^i}{du} &= \frac{\partial y^i}{\partial x^p}\frac{\partial y^j}{\partial x^q}\left(\frac{d^2x^p}{du^2}\frac{dx^q}{du} - \frac{d^2x^q}{du^2}\frac{dx^p}{du}\right) \\ &+ \frac{dx^p}{du}\frac{dx^q}{du}\frac{dx^r}{du}\left(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^p \partial x^q}\frac{\partial y^j}{\partial x^r} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^p \partial x^q}\frac{\partial y^i}{\partial x^r}\right) . \end{aligned} \tag{2.11}$$

e quindi, in virtù di (7), in ogni evento x vale

$$0 = U^pU^qU^r\left(\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^p \partial x^q}|_x\frac{\partial y^j}{\partial x^r}|_x - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^p \partial x^q}|_x\frac{\partial y^i}{\partial x^r}|_x\right) . \tag{2.12}$$

dove le componenti di $U \in T_xM^4$, $U^i = dx^i/du$ si riferiscono ad un moto rettilineo uniforme di un punto materiale e sono valutate quando la corrispondente linea di universo passa per x. Il secondo membro di (2.12) può pensarsi, a x e i, j fissati, come un polinomio $P^{(ij)}_{(x)}[U^0, U^1, U^2, U^3]$ nelle variabili U^i. Tale polinomio si annulla in un insieme aperto per la condizione (2.4) (in realtà è sufficiente la condizione più debole (2.3)), di conseguenza si annulla ovunque, cioè tutti i suoi coefficienti sono nulli. In particolare, per i coefficienti del terzo ordine deve essere:

$$\frac{\partial^3 P^{(ij)}_{(x)}}{\partial U^a \partial U^b \partial U^c} = 0 \,.$$

Il calcolo esplicito del primo membro produce le identità che devono valere in ogni evento $x \in M^4$ e per ogni scelta degli indici i, j, a, b, c:

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^a \partial x^b}\frac{\partial y^j}{\partial x^c} + \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^b \partial x^c}\frac{\partial y^j}{\partial x^a} + \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^c \partial x^a}\frac{\partial y^j}{\partial x^b} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^a \partial x^b}\frac{\partial y^i}{\partial x^c} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^b \partial x^c}\frac{\partial y^i}{\partial x^a} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^c \partial x^a}\frac{\partial y^i}{\partial x^b} = 0 \,.$$

Moltiplicando per $\frac{\partial x^c}{\partial y^k}$ otteniamo:

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^a \partial x^b}\frac{\partial y^j}{\partial x^c}\frac{\partial x^c}{\partial y^k} + \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^b \partial x^c}\frac{\partial y^j}{\partial x^a}\frac{\partial x^c}{\partial y^k} + \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^c \partial x^a}\frac{\partial y^j}{\partial x^b}\frac{\partial x^c}{\partial y^k}$$

$$-\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^a \partial x^b}\frac{\partial y^i}{\partial x^c}\frac{\partial x^c}{\partial y^k} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^b \partial x^c}\frac{\partial y^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^c}{\partial y^k} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^c \partial x^a}\frac{\partial y^i}{\partial x^b}\frac{\partial x^c}{\partial y^k} = 0\,,$$

dove è sottointesa la somma sugli indici ripetuti e pertanto $\frac{\partial y^j}{\partial x^c}\frac{\partial x^c}{\partial y^k} = \frac{\partial y^j}{\partial y^k} = \delta^j_k$ e anche $\frac{\partial y^i}{\partial x^c}\frac{\partial x^c}{\partial y^k} = \frac{\partial y^i}{\partial y^k} = \delta^i_k$, da cui

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^a \partial x^b}\delta^j_k + \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^b \partial x^c}\frac{\partial y^j}{\partial x^a}\frac{\partial x^c}{\partial y^k} + \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^c \partial x^a}\frac{\partial y^j}{\partial x^b}\frac{\partial x^c}{\partial y^k} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^a \partial x^b}\delta^i_k - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^b \partial x^c}\frac{\partial y^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^c}{\partial y^k} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^c \partial x^a}\frac{\partial y^i}{\partial x^b}\frac{\partial x^c}{\partial y^k} = 0.$$

Contraendo gli indici j e k abbiamo ancora

$$4\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^a \partial x^b} + \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^b \partial x^c}\delta^c_a + \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^c \partial x^a}\delta^c_b - \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^a \partial x^b} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^b \partial x^c}\frac{\partial y^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^c}{\partial y^j} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^c \partial x^a}\frac{\partial y^i}{\partial x^b}\frac{\partial x^c}{\partial y^j} = 0\,,$$

e quindi

$$5\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^a \partial x^b} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^b \partial x^c}\frac{\partial y^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^c}{\partial y^j} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^c \partial x^a}\frac{\partial y^i}{\partial x^b}\frac{\partial x^c}{\partial y^j} = 0\,.$$

Abbiamo quindi l'utile conseguenza di (a) valida in ogni evento $x \in M^4$:

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^a \partial x^b}|_x = \Psi_a(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^b}|_x + \Psi_b\frac{\partial y^i}{\partial x^a}|_x \tag{2.13}$$

dove

$$\Psi_k(x) := \frac{1}{5}\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^c \partial x^k}|_x \frac{\partial x^c}{\partial y^j}|_x\,. \tag{2.14}$$

Trattamento di (b). Notiamo che

$$\eta_{ij}\frac{dy^i}{du}\frac{dy^j}{du} = \left(\eta_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial x^p}\frac{\partial y^j}{\partial x^q}\right)\frac{dx^p}{du}\frac{dx^q}{du}\,. \tag{2.15}$$

In tal modo la condizione (b) si riscrive

$$\eta_{ij}U^iU^j = 0 \quad \text{implica} \quad \eta_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial x^p}|_x\frac{\partial y^j}{\partial x^q}|_x U^pU^q = 0\,. \tag{2.16}$$

In altri termini

$$\eta'_x(U,U) = 0 \quad \text{se} \quad \eta(U,U) = 0\,, \tag{2.17}$$

dove il vettore $U \in T_x M^4$, con componenti $U^k = dx^k/du$ rispetto alla base associata in x dalle coordinate minkowskiane di $\mathscr{F}$, è soggetto alla restrizione (2.4), e la forma quadratica η'_x è definita da

$$\eta'_x(U,U) := \eta_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^p}|_x \frac{\partial y^j}{\partial x^q}|_x U^p U^q \,, \tag{2.18}$$

In particolare vale $\eta(U,U) = 0$ e quindi $\eta'_x(U,U) = 0$ se

$$(U^0)^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} (U^\alpha)^2 \,.$$

Un vettore di questo tipo si ottiene ponendo $U_V^0 = |V|$ e $U_V^\alpha = V^\alpha$, dove $|V| := \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (V^\alpha)^2}$.
Rappresentiamo η'_x con la matrice simmetrica di coefficienti c_{00}, $c_{0\alpha} = c_{\alpha 0}$, $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$.
La condizione $\eta'_x(U_V, U_V) = 0$ si riscrive:

$$c_{00}|V|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{3} |V| V^\alpha c_{0\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} V^\alpha V^\beta c_{\alpha\beta} = 0$$

per $V^\rho \in \mathbb{R}$. Ossia

$$2\sum_{\alpha=1}^{3} |V| V^\alpha c_{0\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} V^\alpha V^\beta \left(c_{\alpha\beta} + c_{00}\delta_{\alpha\beta}\right) = 0$$

per ogni $V^\rho \in \mathbb{R}$. Questo è possibile solo se: $c_{\alpha\beta} = -c_{00}\delta_{\alpha\beta}$ e $c_{0\alpha} = 0$. Infatti, scegliendo inizialmente un vettore colonna di numeri $V^\rho \in \mathbb{R}$ e poi il vettore colonna dei numeri $-V^\rho \in \mathbb{R}$, si ha che devono valere entrambe le condizioni:

$$2\sum_{\alpha=1}^{3} |V| V^\alpha c_{0\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} V^\alpha V^\beta \left(c_{\alpha\beta} + c_{00}\delta_{\alpha\beta}\right) = 0$$

e

$$-2\sum_{\alpha=1}^{3} |V| V^\alpha c_{0\alpha} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} V^\alpha V^\beta \left(c_{\alpha\beta} + c_{00}\delta_{\alpha\beta}\right) = 0$$

per ogni $V^\rho \in \mathbb{R}$. Ma allora devono valere separatamente le condizioni:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} |V| V^\alpha c_{0\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} V^\alpha V^\beta \left(c_{\alpha\beta} + c_{00}\delta_{\alpha\beta}\right) = 0$$

per ogni $V^\rho \in \mathbb{R}$. La prima richiesta implica che: $c_{0\alpha} = 0$ per ogni $\alpha = 1, 2, 3$. La seconda, tenuto conto della simmetria dei coefficienti $c_{\alpha\beta} + c_{00}\delta_{\alpha\beta}$, implica che[1] $c_{\alpha\beta} + c_{00}\delta_{\alpha\beta} = 0$ cioé : $c_{\alpha\beta} = -c_{00}\delta_{\alpha\beta}$. In definitiva, se indichiamo con $\lambda(x)$ il coefficiente $-c_{00}$, deve essere:

$$\eta'_x = \lambda(x)\eta \,,$$

[1] Se A è una matrice simmetrica $n \times n$ e vale $u^t A u = 0$ per ogni $u \in \mathbb{R}^n$, ponendo $u = x + y$ abbiamo: $x^t A x + y^t A y + x^t A y + y^t A x = 0$, ossia $x^t A y + y^t A x = 0$. Ma, dato che $A^t = A$, vale anche $y^t A x = x^t A y$, per cui deve essere $x^t A y = 0$ per ogni scelta di $x, y \in \mathbb{R}^n$, che significa $A = 0$.

dove $x \mapsto \lambda(x) \in \mathbb{R}$ è una funzione arbitraria. Tale funzione è differenziabile perché, interpretando le forme quadratiche come matrici reali 4×4 risulta subito

$$2\lambda(x) = \mathrm{tr}(\eta'_x) = \delta^{pq}\eta_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial x^p}|_x \frac{\partial y^j}{\partial x^q}|_x\,,$$

dove la traccia è quella ordinaria per matrici 4×4. L'ultimo membro è banalmente differenziabile, inoltre $\lambda(x)$ è strettamente positivo a causa di (2.18) e del teorema di Sylvester sulla permanenza della segnatura [9] di una forma quadratica sotto l'azione di una trasformazione di congruenza. Concludiamo che (b) implica che

$$\eta_{ij}\frac{\partial y^i}{\partial x^p}|_x \frac{\partial y^j}{\partial x^q}|_x = \lambda(x)\eta_{pq}\,, \tag{2.19}$$

dove $x \mapsto \lambda(x)$ è una funzione strettamente positiva e differenziabile.

Infine, nelle ipotesi di validità di (a) e (b) deriviamo in x^r la (2.19) esprimendo le derivate seconde delle y^i tramite (2.13). In tal modo si ottiene

$$\eta_{ij}\left[\left(\Psi_p\frac{\partial y^i}{\partial x^r} + \Psi_r\frac{\partial y^i}{\partial x^p}\right)\frac{\partial y^j}{\partial x^q} + \left(\Psi_q\frac{\partial y^j}{\partial x^r} + \Psi_r\frac{\partial y^j}{\partial x^q}\right)\frac{\partial y^i}{\partial x^p}\right] = \frac{\partial \lambda}{\partial x^r}\eta_{pq}\,.$$

Usando ancora la (2.19), l'identità trovata si riduce a

$$\Psi_p\eta_{rq} + \Psi_q\eta_{pr} + 2\Psi_r\eta_{pq} = \frac{\partial \ln\lambda}{\partial x^r}\eta_{pq}\,.$$

Per concludere, moltiplichiamo entrambi i membri per η_{qs} e sommiamo sull'indice q il risultato finale, tenendo conto del fatto che $\sum_{q=0}^{3}\eta_{uq}\eta_{qs} = \delta_{us}$, ottenendo:

$$\Psi_p\delta_{rs} + \sum_{q=0}^{3}\Psi_q\eta_{pr}\eta_{qs} + 2\Psi_r\delta_{ps} = \frac{\partial \ln\lambda}{\partial x^r}\delta_{ps}\,. \tag{2.20}$$

Consideriamo tale sistema come un sistema algebrico nelle incognite Ψ_r e $\partial\ln\lambda/\partial x^r$. Scegliendo $p = r = 0$ e insieme a $s = 1,2,3$, il sistema produce $\Psi_s = 0$ per $s = 1,2,3$. Tenendo conto di ciò ed assumendo $s = 0, p = r = 1$, dallo stesso sistema si ricava anche $\Psi_0 = 0$. Infine tenendo conto che tutte le funzioni Ψ_r sono nulle, il sistema (2.20) fornisce $\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^r} = 0$ per $r = 0,1,2,3$. Concludiamo che l'unica soluzione del sistema (2.20), per ogni $x \in M$ e $k = 0,1,2,3$:

$$\Psi_k(x) = 0\,, \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial\ln\lambda}{\partial x^r} = 0\,. \tag{2.22}$$

Da (2.14), tenendo conto che la matrice jacobiana di passaggio dalle coordinate x^0, x^1, x^2, x^3 alle coordinate y^0, y^1, y^2, y^3 è invertibile, le soluzioni di sopra implicano che per ogni $i = 0,1,2,3$,

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j}|_x = \text{costante}\,, \tag{2.23}$$

$$\lambda(x) = \text{costante}\,. \tag{2.24}$$

Mettendo tutto insieme, abbiamo ottenuto che, la trasformazione di coordinate minkowskiane x^0, x^1, x^2, x^3 e y^0, y^1, y^2, y^3 riferite a due riferimenti inerziali rispettivamente $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ deve essere della forma:

$$y^i = C^i + L^i{}_j x^j \tag{2.25}$$

dove i 4 coefficienti $C^i \in \mathbb{R}$ sono arbitrari e i 16 coefficienti $L^i{}_j \in \mathbb{R}$ soddisfano le relazioni

$$\eta_{ij} L^i{}_p L^j{}_q = \lambda\, \eta_{pq} ,$$

dove $\lambda > 0$ è una costante. Si noti che se ridefiniamo le unità di misura dello spazio e del tempo del riferimento $\mathscr{F}$ dilatando di un fattore comune $\lambda^{1/2}$ (ciò non è in contraddizione con i postulati della Relatività come precisato dopo **RS1**), possiamo sempre ridurci alla trasformazione indotta dai coefficienti $\Lambda^i{}_j := \lambda^{-1/2} L^i_j$. Infatti, definendo nuove coordinate minkowskiane su $\mathscr{F}$ date da $\overline{x}^j := \sqrt{\lambda} x^j$, avremmo da (2.25) che dovrà essere:

$$y^i = C^i + \sqrt{\lambda} \Lambda^i{}_j x^j , \tag{2.26}$$

e cioé:

$$y^i = C^i + \Lambda^i{}_j \overline{x}^j .$$

Indicando nuovamente *senza la barra* le coordinate associate a $\mathscr{F}$, avremmo allora:

$$y^i = C^i + \Lambda^i{}_j x^j , \tag{2.27}$$

dove i coefficienti $C^i \in \mathbb{R}$ sono arbitrari e, per costruzione, le matrici Λ di coefficienti $\Lambda^i{}_j$ soddisfano la **relazione di Lorentz**:

$$\Lambda^t\, \eta\, \Lambda = \eta . \tag{2.28}$$

Supponiamo viceversa che $\mathscr{F}$ sia un riferimento inerziale dotato di coordinate minkowskiane x^0, x^1, x^2, x^3 e che $\mathscr{F}'$ sia un secondo riferimento dotato di coordinate minkowskiane y^0, y^1, y^2, y^3 che sono connesse alle precedenti tramite (2.27) e (2.28). È immediato verificare che $\mathscr{F}'$ deve essere inerziale perché, a causa della linearità, le trasformazioni lineari di sopra preservano il moto rettilineo uniforme (basta notare che se la condizione (2.6) è soddisfatta nel riferimento $\mathscr{F}$, risulta essere soddisfatta anche in $\mathscr{F}'$) e la nozione di punto materiale isolato è assunta essere indipendente dal riferimento. Ulteriormente la condizione (2.28) assicura immediatamente tramite (2.8) che un punto materiale in moto alla velocità della luce in $\mathscr{F}$ è visto in $\mathscr{F}'$ in moto alla velocità della luce.
In definitiva abbiamo provato il seguente teorema:

Teorema 2.1. *Assumendo:*
(a) *la validità del principio d'inerzia* **RS2**,
(b) *la validità del principio di costanza del valore c della velocità della luce* **RS1**, *in particolare adottando la procedura di sincronizzazione einsteiniana,*

(c) *di poter disporre di un punto materiale isolato in ogni evento dello spaziotempo per un intervallo di tempo finito (rispetto a qualche riferimento inerziale),*
(d) *che la velocità dei punti materiali nei riferimenti inerziali possa avere componenti in ogni direzione e verso e di modulo compreso almeno nell'intervallo* $[0, c]$ *(2.4),*
allora vale quanto segue.
(1) *La legge di trasformazione tra due sistemi di coordinate minkowskiane solidali con due rispettivi sistemi di riferimento inerziali deve essere lineare.*
(2) *Più precisamente (previa una eventuale ridefinizione delle unità di misura di lunghezze spaziali ed intervalli temporali nei riferimenti inerziali in conformità con la validità dei principi sopra assunti) le trasformazioni (2.27) con* $C^i \in \mathbb{R}$ *e la matrice dei coefficienti* $\Lambda^i{}_j$ *soddisfacente (2.28), sono tutte e sole le trasformazioni di sistemi di coordinate minkowskiane solidali con i rispettivi sistemi di riferimento inerziali.* $\diamondsuit$

Nota 2.2. Al fine di ottenere $\lambda = 1$ abbiamo sfruttato la possibilità di ridefinire dilatando o contraendo se necessario le unità di misura dei singoli riferimenti inerziali (senza alterare il valore della velocità della luce). Una questione che si deve porre fisicamente è allora la seguente. Consideriamo tre arbitrari sistemi di riferimento inerziali $\mathscr{F}_l$ con $l = 1, 2, 3$. λ_{ij} indica il coefficiente λ che si ottiene esprimendo la legge di trasformazione (2.26) quando le coordinate $y^0, \ldots, y^3$ sono relative al riferimento i mentre le coordinate $x^0, \ldots, x^3$ sono relative al riferimento j. Per costruzione deve risultare:

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ik}\lambda_{kj} \;, \quad \text{se } i, j, k \in \{1, 2, 3\} \,. \tag{2.29}$$

Scegliendo $i = j = k$ e poi $i = j$ si hanno in particolare le relazioni

$$\lambda_{ii} = 1 \;, \quad \lambda_{ik} = \lambda_{ki}^{-1} \,. \tag{2.30}$$

In base alle ipotesi fino ad ora fatte, non è possibile concludere a questo punto che $\lambda_{ik} = 1$, cioé che le unità di misura possano essere fissate, *una volta per tutte in tutti i riferimenti inerziali*, al fine di poter usare sempre la legge di trasformazione (2.27) tra i corrispettivi sistemi di coordinate per *ogni* coppia di riferimenti inerziali. Un'ipotesi abbastanza debole per ottenere questo risultato è la richiesta che per ogni coppia di riferimenti inerziali $\mathscr{F}_i, \mathscr{F}_j$ distinti vi sia un terzo riferimento inerziale $\mathscr{F}_k$ per il quale valga $\lambda_{ki} = \lambda_{kj}$. Dalla (2.29) e dalla seconda in (2.30) si ha immediatamente che deve essere $\lambda_{ij=1}$. È possibile mostrare che l'esistenza di $\mathscr{F}_k$ suddetto è conseguenza dell'ipotesi di isotropia delle leggi fisiche formulate nei riferimenti inerziali, se si assume tale ipotesi. Tuttavia noi non ci occuperemo qui della richiesta generale dell'isotropia ed assumeremo direttamente che si possano scegliere una volta per tutte i coefficienti λ pari a $\lambda = 1$ per ogni coppia di riferimenti inerziali.

2.2 IL gruppo di Lorentz ed il gruppo di Poincaré.

Possiamo ora introdurre i gruppi di Lorentz e Poincaré tramite il seguente teorema che prova che le trasformazioni tra coordinate minkowskiane ottenute nella sezione precedente, tenuto conto dell'osservazione 2.2, formano un gruppo.

Teorema 2.2. (**I gruppi di Lorentz e di Poincaré**.)
(1) *L'insieme delle matrici reali* 4×4, Λ *soddisfacenti*

$$\Lambda^t \, \eta \, \Lambda = \eta \, . \tag{2.31}$$

con

$$\eta := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \tag{2.32}$$

formano un gruppo, $O(1,3)$*, sottogruppo di* $GL(4,\mathbb{R})$ *detto* **Gruppo di Lorentz**. $O(1,3)$ *è chiuso rispetto all'operazione di trasposizione di matrici.*
(2) *L'insieme delle trasformazioni da* $\mathbb{R}^4$ *in* $\mathbb{R}^4$ *definite da*

$$\mathscr{P}_{(C,\Lambda)} : \mathbb{R}^4 \ni X \mapsto C + \Lambda X \, , \tag{2.33}$$

con $C \in \mathbb{R}^4$*, e* $\Lambda \in O(1,3)$ *formano un gruppo,* $IO(1,3)$*, sottogruppo del gruppo delle funzioni biettive da* $\mathbb{R}^4$ *in* $\mathbb{R}^4$ *detto* **Gruppo di Poincaré**[2]. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Per prima cosa proviamo che $O(1,3)$ è un gruppo sottogruppo di $GL(4,\mathbb{R})$. A tal fine notiamo che la matrice identità soddisfa (2.31) per cui è sufficiente provare che $O(1,3)$ è chiuso rispetto al prodotto di matrici ed all'operazione di inversa.
Per quanto riguarda il primo punto, notiamo che, se $\Lambda'^t\eta\Lambda' = \eta$ e $\Lambda^t\eta\Lambda = \eta$ allora banalmente $\Lambda'^t\Lambda^t\eta\Lambda\Lambda' = \eta$ per cui $(\Lambda\Lambda')^t\eta\Lambda\Lambda' = \eta$. Quindi $O(1,3)$ è chiuso rispetto al prodotto di matrici.
Per quanto riguarda la chiusura rispetto all'operazione di inversa, notiamo che dal teorema di Binet, $\Lambda^t\eta\Lambda = \eta$ implica $(det\,\Lambda^t)(det\,\eta)(det\,\Lambda) = det\,\eta = -1$ ossia $(det\,\Lambda)^2 = 1$. Per tale motivo $det\,\Lambda \neq 0$ e quindi *esiste* Λ^{-1} se $\Lambda \in O(1,3)$.
D'altra parte, se $\Lambda \in O(1,3)$ allora vale anche $\Lambda\eta\Lambda^t = \eta$. Infatti, moltiplicando ambo membri di $\Lambda^t\eta\Lambda = \eta$ per $\Lambda\eta$ a sinistra e tenendo conto che $\eta\eta = I$, si ha

$$\Lambda\eta\Lambda^t\eta\Lambda = \Lambda \, ,$$

per cui

$$\Lambda\eta\Lambda^t = \Lambda(\eta\Lambda)^{-1} = \Lambda\Lambda^{-1}\eta = \eta \, .$$

Ciò prova che $O(1,3)$ è chiuso rispetto alla trasposizione di matrici. Per concludere riguardo alla chiusura rispetto all'inversa, notiamo che se $\Lambda^t\eta\Lambda = \eta$ allora $(\Lambda^t\eta\Lambda)^{-1} = \eta^{-1}$ ossia $\Lambda^{-1}\eta\Lambda^{-1t} = \eta$, ossia $\Lambda^{-1t} \in O(1,3)$. Applicando la chiusura rispetto alla trasposizione otteniamo che $\Lambda^{-1} =$

[2] Il simbolo $IO(1,3)$, ed in particolare la lettera I, deriva dal fatto che il gruppo di Poincarè si chiama anche gruppo pseudo ortogonale *inomogeneo*.

$(\Lambda^{-1t})^t \in O(1,3)$ se $\Lambda \in O(1,3)$.
Per quanto riguarda la seconda parte del teorema, notiamo che la trasformazione (2.33) con $C = 0$ e $\Lambda = I$ appartiene all'insieme considerato di trasformazioni e $\mathscr{P}_{(0,I)}$ è la funzione identità da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^4$. Di conseguenza è sufficiente mostrare che l'insieme di trasformazioni considerato è chiuso rispetto alla composizione e all'operazione di calcolo dell'inversa. Per quanto riguarda il primo punto esso è di immediata prova perché se $\mathscr{P}_{(C',\Lambda')}$ e $\mathscr{P}_{(C,\Lambda)}$ sono nell'insieme di trasformazioni considerato

$$\mathscr{P}_{(C',\Lambda')} \circ \mathscr{P}_{(C,\Lambda)} = \mathscr{P}_{(C'+\Lambda' C,\Lambda'\Lambda)}$$

è ancora una trasformazione dell'insieme considerato perché $\Lambda'\Lambda \in O(1,3)$ se $\Lambda', \Lambda \in O(1,3)$. come provato sopra.
Per quanto riguarda la chiusura rispetto al calcolo dell'inversa notiamo che se $\mathscr{P}_{(C,\Lambda)}$ è nell'insieme di trasformazioni considerato,

$$\mathscr{P}^{-1}_{(C,\Lambda)} = \mathscr{P}_{(-\Lambda^{-1}C,\Lambda^{-1})}$$

ed il secondo membro è ben definito ed è ancora elemento dell'insieme di trasformazioni considerato perché $\Lambda^{-1} \in O(1,3)$ se $\Lambda \in O(1,3)$ come provato sopra. □

Nota 2.3.
(1) La scrittura $O(1,3)$ è riferita al numero di volte in cui appare -1 (una volta) ed al numero di volte in cui appare $+1$ (tre volte) nella matrice diagonale η. Il gruppo $O(1,3)$ è un sottocaso di una classe di gruppi ciascuno dei quali è indicato con $O(n,m)$ dove n, m sono interi non negativi arbitrari con $m > 0$. Tali gruppi vengono detti genericamente *pseudo ortogonali*. È chiaro che per $n = 0$ si ritrovano i soliti gruppi ortogonali $O(0,m) = O(m)$. Precisiamo che in alcuni testi i significati di n e m in $O(n,m)$ sono invertiti rispetto alla notazione usata qui.
(2) Se A e B sono gruppi, $\{\beta_b\}_{b\in B}$ è una classe di **automorfismi gruppali su** A (cioé isomorfismi gruppali $\beta_b : A \to A$) che **rappresentano** B, se vale $\beta_b \circ \beta_{b'} = \beta_{bb'}$ per ogni coppia di elementi $b, b' \in B$, dove $\circ$ è l'usuale composizione di funzioni e bb' è il prodotto gruppale in B di b e b'. Per ogni coppia di gruppi A, B dotata di una classe di automorfismi gruppali su A che rappresentano B, si può costruire una struttura gruppale su $A \times B$ detta **prodotto semidiretto** dei gruppi A e B. In questo caso il prodotto su $A \times B$ è definito come:

$$(a,b) \odot (a',b') := (a\beta_b(a'), bb')\,,$$

dove $a\beta_b(a')$ è il prodotto gruppale in A di a e $\beta_b(a')$. Si dimostra facilmente che il prodotto definito sopra rende $A \times B$ un gruppo. Nel caso in cui $\beta_b = id_A$ per ogni $b \in A$, la struttura di gruppo costruita prende il nome di **prodotto diretto** dei gruppi A e B.
Risulta ovvio che $IO(1,3)$ è un prodotto semidiretto del gruppo (abeliano) delle traslazioni di $\mathbb{R}^4$ e del gruppo di Lorentz $O(1,3)$. con automorfismi β_Λ definiti come:

$$\beta_\Lambda C := \Lambda C\,, \quad \text{per ogni } \Lambda \in O(1,3) \text{ e ogni } C \in \mathbb{R}^4.$$

Esercizi 2.1.

1. Mostrare che se $\Lambda \in O(1,3)$ allora

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^t \eta \,.$$

2. Se $\Lambda \in O(1,3)$ può accadere che $\Lambda^0{}_0 = 0$?

Soluzione. Dalla definizione di $O(1,3)$ si ha che deve essere

$$-1 = \eta_{00} = -(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^0{}_\alpha \,.$$

per cui la risposta è negativa.

Esempi 2.1.

1. Si consideri una matrice $R \in O(3)$, ossia una matrice reale 3×3 tale che $R^t R = I$. Si prova immediatamente, usando la definizione del gruppo di Lorentz che la matrice

$$\Omega_R := \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

è un elemento del gruppo di Lorentz. Similmente $\mathscr{P}_{(C,\Omega_R)}$ è nel gruppo di Poincaré per ogni $C \in \mathbb{R}^4$. In questo modo abbiamo ritrovato il fatto fisicamente ovvio, che all'interno dell'insieme delle trasformazioni di coordinate tra due riferimenti ci devono anche essere la trasformazioni di coordinate all'interno di uno stesso riferimento, cioè trasformazioni che non coinvolgono velocità relative. Come vedremo più avanti, ed esattamente come avviene per il gruppo di Galileo, una matrice del gruppo di Lorentz può infatti essere decomposta in più parti di cui solo una parte coinvolge la cinematica. Gli aspetti interessanti che differenziano la cinematica relativistica da quella classica sono riferiti a tale parte della decomposizione di un elemento del gruppo di Poincaré.

2. Si considerino le trasformazioni dette **trasformazioni speciali di Lorentz** lungo l'asse x^3

$$\Lambda := \left[\begin{array}{c|ccc} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v/c \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{array}\right]$$

dove $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ e $v \in (-c, c)$. Si verifica subito, applicando la definizione del gruppo di Lorentz, che questa trasformazione è un elemento di tale gruppo. L'azione esplicita della matrice di sopra è la seguente.

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2} x^3) \,, \tag{2.34}$$

$$x'^1 = x^1 \,, \tag{2.35}$$

$$x'^2 = x^2 \,, \tag{2.36}$$

$$x'^3 = \gamma(x^3 - vt) \,, \tag{2.37}$$

dove (t, x^1, x^2, x^3) e (t', x'^1, x'^2, x'^3) sono le coordinate di *uno stesso evento* riferite a due sistemi di coordinate minkowskiane differenti relativi a due riferimenti $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ rispettivamente. Si noti che per $t = 0$ e $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ troviamo che $t' = 0$ e $x'^1 = x'^2 = x'^3 = 0$. Questo significa che i due riferimenti *hanno posto l'origine degli assi e del tempo in uno stesso evento O.* Al tempo $t = t' = 0$ i due osservatori "si vedono" reciprocamente con le origini rispettive degli assi spaziali coincidenti.
L'aspetto più interessante delle trasformazioni di sopra è che esse implicano che la *nozione di contemporaneità dipenda dal riferimento.* Infatti, dalla (2.34) risulta subito che se due eventi $p, q \in M^4$ con coordinate spaziali $x^3(p) \neq x^3(q)$ a giudizio del riferimento $\mathscr{F}$ risultano avere la stessa coordinata temporale $t(p) = t(q)$, ciò sarà *falso* nel giudizio dell'altro riferimento! Torneremo in seguito su tutti questi fenomeni apparentemente "paradossali".
Vediamo ora di dare un significato fisico al parametro v. Consideriamo un punto P in quiete con il riferimento $\mathscr{F}'$ con coordinate (costanti!) (x'^1, x'^2, x'^3). Tale punto descriverà una curva nelle coordinate dell'altro riferimento e parametrizzata in t'. Possiamo esprimere la curva in funzione di t usando direttamente (2.37). Otteniamo in tal modo:

$$x^1(t) = x'^1 \,, \tag{2.38}$$
$$x^2(t) = x'^2 \,, \tag{2.39}$$
$$x^3(t) = vt + \frac{x'^3}{\gamma} \,, \tag{2.40}$$

dove x'^3 è costante. È allora chiaro che v rappresenta il valore (con segno) della velocità con cui si vedono muovere nel riferimento $\mathscr{F}$ i punti in quiete nel riferimento $\mathscr{F}'$. Tale velocità non dipende dal punto ed è perciò una *velocità di trascinamento.* Le trasformazioni speciali giocano un ruolo simile a quello giocato dalle trasformazioni pure di Galileo lungo un asse.
3. Per motivi *sperimentali* le trasformazioni di Lorentz trovate sopra si devono ridurre a quelle di Galilei in qualche approssimazione di "piccole velocità di trascinamento". Se ciò non fosse avremmo scoperto le trasformazioni di Lorentz molto tempo prima dell'inizio del 1900. È chiaro che possiamo confrontare v solo con c. Consideriamo lo sviluppo di Taylor della funzione

$$\gamma(v/c) = 1/\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

che compare in (2.34)-(2.37).

$$\gamma(v/c) = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + o\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \,.$$

Dal punto di vista pratico $c \sim 3 \cdot 10^5\ km/s$ è una velocità grandissima. Vediamo qualche stima. Per velocità relative tra sistemi di riferimento dell'ordine al più di $1000 km/s$, troviamo al più $v^2/c^2 \sim 10^{-4}$ per cui il fattore γ nelle (2.34)-(2.37) è del tutto trascurabile. Se lavoriamo con distanze dell'ordine al più di 100.000 km e velocità come detto sopra, il secondo addendo nel secondo membro di (2.34) produce valori di tempo dell'ordine al più di 10^{-3} s. Trascurando completamente sia γ che il secondo addendo nel secondo membro di (2.34) otteniamo

$$t' = t \,, \tag{2.41}$$
$$x'^1 = x^1 \,, \tag{2.42}$$
$$x'^2 = x^2 \,, \tag{2.43}$$
$$x'^3 = x^3 - vt \,. \tag{2.44}$$

Questa è una trasformazione pura di Galilei lungo l'asse x^3.

2.2.1 Il sottogruppo ortocrono.

In realtà la classe di trasformazioni di Poincaré è troppo vasta per essere in accordo con il principio di relatività esteso a tutte le leggi della fisica per il seguente motivo fisico: il secondo principio della termodinamica assume la stessa forma solo in sistemi di riferimento che vedono scorrere il tempo "nello stesso verso". (Si osservi che non è comunque scorretto dal punto di vista matematico ammettere anche l'uso di riferimenti i cui il tempo è visto scorrere "all'indietro".) La richiesta di descrivere "lo scorrimento del tempo nello stesso verso" per due sistemi di riferimento inerziali si traduce nel requisito matematico in riferimento alle solite coordinate minkowskiane:

$$\left.\frac{\partial y^0}{\partial x^0}\right|_p > 0$$

per ogni evento $p \in M^4$. Tale requisito, si traduce immediatamente nella richiesta sui coefficienti ${\Lambda^i}_j$

$${\Lambda^0}_0 > 0 \,. \tag{2.45}$$

Nella fisica classica il requisito di non invertire il senso del tempo è automatico quando si assume che la coordinata temporale di ogni riferimento coincida con il tempo assoluto a meno di una costante additiva.

Teorema 2.3. (**I gruppi di Lorentz e di Poincaré ortocroni**.)
(1) *(i) Se $\Lambda \in O(1,3)$ allora ${\Lambda^0}_0 < 0$ oppure ${\Lambda^0}_0 > 0$, e queste disuguaglianze sono rispettivamente equivalenti a ${\Lambda^0}_0 \leq -1$ e ${\Lambda^0}_0 \geq +1$.*

(ii) L'insieme delle matrici Λ del gruppo di Lorentz $O(1,3)$ tali che ${\Lambda^0}_0 > 0$ forma un sottogruppo $O(1,3)\!\uparrow$ detto il **gruppo di Lorentz ortocrono**. *Tale gruppo è chiuso rispetto alla trasposizione di matrici.*
(2) *L'insieme delle trasformazioni del gruppo di Poincaré $\mathscr{P}_{(C,\Lambda)}$ con $\Lambda \in O(1,3)\!\uparrow$ forma un sottogruppo detto* **gruppo di Poincaré ortocrono** *indicato con $IO(1,3)\!\uparrow$.*
(3) *Definita la matrice, $T := \eta$ detta* **inversione del tempo** *dove η è data dalla (2.7), vale*
(i) $T \in O(1,3)$,

(ii) $TT = I$.

(iii) per ogni $\Lambda \in O(1,3)$, $T\Lambda \in O(1,3)\!\uparrow$ *se e solo se* $\Lambda \notin O(1,3)\!\uparrow$.

(iv) $O(1,3)$ *coincide con l'unione dei due insiemi disgiunti* $O(1,3)\uparrow$ *e* $TO(1,3)\uparrow$, *dove* $TO(1,3)\!\uparrow := \{T\Lambda \mid \Lambda \in O(1,3)\!\uparrow\}$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. La prova di (i) in (1) è immediata: dalla condizione $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ si ha che deve essere

$$-1 = \eta_{00} = -(\Lambda^0{}_0)^2 + \sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^0{}_\alpha\,, \tag{2.46}$$

da cui la tesi segue immediatamente. In base a (i) le condizioni $\Lambda^0{}_0 > 0$ e $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ sono equivalenti. Le dimostrazioni della parte (ii) di (1) e della parte (2) sono molto simili, con ovvie modifiche, a quelle del teorema 2.2. Ci limitiamo pertanto a provare che se $\Lambda \in O(1,3)\!\uparrow$ allora $\Lambda^{-1} \in O(1,3)\!\uparrow$ e che, se $\Lambda, \Lambda' \in O(1,3)\!\uparrow$ allora $\Lambda\Lambda' \in O(1,3)\!\uparrow$. Si osservi che è ovvio che $I \in O(1,3)\!\uparrow$ e che $\Lambda^t \in O(1,3)\!\uparrow$ se $\Lambda \in O(1,3)\!\uparrow$.
Per quanto riguarda la chiusura rispetto alla operazione di calcolo dell'inversa notiamo che, per computo diretto si verifica che $\Lambda^{-1} = \eta\Lambda^t\eta$ per ogni $\Lambda \in O(1,3)$. D'altra parte, si verifica direttamente facendo il calcolo esplicito dei prodotti matriciali che $(\eta\Lambda^t\eta)^0{}_0 = (\Lambda^t)^0{}_0 = \Lambda^0{}_0$ per cui la tesi è provata.
Passiamo alla verifica della chiusura rispetto al prodotto. Dobbiamo provare che se valgono $\Lambda^0{}_0 > 0, \Lambda'^0{}_0 > 0$ allora $(\Lambda\Lambda')^0{}_0 > 0$. Partiamo dall'espressione

$$(\Lambda\Lambda')^0{}_0 = \Lambda^0{}_0 \Lambda'^0{}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda^0{}_\alpha \Lambda'^\alpha{}_0\,.$$

Questa può essere scritta come:

$$(\Lambda\Lambda')^0{}_0 = \Lambda^0{}_0 (\Lambda'^t)^0{}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda^0{}_\alpha (\Lambda'^t)^0{}_\alpha$$

Per concludere la dimostrazione è sufficiente mostrare che

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda^0{}_\alpha (\Lambda'^t)^0{}_\alpha \right| \leq |\Lambda^0{}_0 (\Lambda'^t)^0{}_0|\,, \tag{2.47}$$

per cui il segno di $(\Lambda\Lambda')^0{}_0$ (che non può annullarsi per (i) di (1)) coincide con quello di $\Lambda^0{}_0\Lambda'^0{}_0$ ed è quindi positivo. Dimostriamo (2.47). Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda^0{}_\alpha (\Lambda'^t)^0{}_\alpha \right|^2 \leq \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^0{}_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^{3} (\Lambda'^t)^0{}_\beta (\Lambda'^t)^0{}_\beta \right)\,.$$

Possiamo usare (2.46) applicandola a Λ e Λ'^t (tenendo conto che Λ^t appartiene al gruppo di Lorentz dato che Λ appartiene a tale gruppo che è chiuso sotto trasposizione.) (2.46) implica immediatamente che

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^0{}_\alpha \leq (\Lambda^0{}_0)^2 \quad \text{e} \quad \sum_{\beta=1}^{3} (\Lambda'^t)^0{}_\beta (\Lambda'^t)^0{}_\beta \leq ((\Lambda'^t)^0{}_0)^2,$$

che insieme implicano (2.47).
La dimostrazione di (3) per quanto riguarda (i) e (ii) è ovvia per computo diretto. Per quanto riguarda (iii) e (iv) si basa su (i) di (1): se $\Lambda \in O(1,3)$ può accadere solo uno dei due casi mutuamente esclusivi $\Lambda^0{}_0 > 0$ oppure $\Lambda^0{}_0 < 0$ e la moltiplicazione di una matrice $\Lambda \in O(1,3)$ per T a sinistra (oppure equivalentemente a destra), banalmente scambia i due casi come risultato. $\square$

Nota 2.4. L'insieme $TO(1,3)\uparrow$ non è un sottogruppo di $O(1,3)$ perché non contiene l'identità.

Capitolo 3

Lo spaziotempo della Relatività Speciale e la struttura causale.

In questo capitolo faremo ora uso di elementari nozioni di geometria (pseudo)riemanniana [1, 2, 5, 6]. Un richiamo di alcune nozioni è riportato nell'Appendice B. Il fine del capitolo è quello di presentare in forma rigorosa e deduttiva, tramite appropriate nozioni di geometria (pseudo)riemanniana, il contenuto fisico dei capitoli precedenti sviluppato ulteriormente fino ad includere la struttura causale dello spaziotempo.

3.1 Lo spaziotempo della Relatività Speciale.

Abbiamo visto nel capitolo precedente che le trasformazioni tra sistemi coordinate minkowskiane hanno la struttura data dal gruppo di Poincaré

$$\mathscr{P}_{(C,\Lambda)} : \mathbb{R}^4 \ni X \mapsto C + \Lambda X \,, \tag{3.1}$$

dove le matrici Λ sono elementi del gruppo di Lorentz definito dalla richiesta:

$$\Lambda^t \, \eta \, \Lambda = \eta \,. \tag{3.2}$$

Tali fatti hanno alcune conseguenze determinanti.
(a) Il fatto che le coordinate minkowskiane siano globali e che le trasformazioni di Poincaré siano *lineari* induce naturalmente su M^4 una struttura di *spazio affine* in cui l'applicazione che associa a coppie di punti vettori è definita come segue. Si fissi un evento generico $O \in M^4$ e si consideri lo spazio vettoriale reale $V := T_O M^4$. Si fissi un sistema di coordinate minkowskiane (x^0, x^1, x^2, x^3) di origine O. Siano e_0, e_1, e_2, e_3 i vettori di base associati a tali coordinate in $V = T_O M^4$. Se $p, q \in M^4$ associamo alla coppia ordinata (p, q) il vettore $\overrightarrow{pq} \in V$ tale che

$$\overrightarrow{pq} := (x^i(q) - x^i(p))e_i \,.$$

Usando le trasformazioni del gruppo di Poincaré (che connettono coppie di sistemi di coordinate minkowskiane) è immediato provare che l'applicazione definita in tal modo non dipende dalle

coordinate minkowskiane usate. Ulteriormente tale applicazione soddisfa banalmente le richieste per definire una struttura affine (vedi Appendice A), come il lettore può facilmente provare[1]. Quindi: *lo spaziotempo della Relatività speciale è una varietà differenziabile con struttura di spazio affine in cui i sistemi di coordinate minkowskiane formano una sottoclasse della classe delle coordinate cartesiane su M^4.*
(b) Se definiamo su M^4 un tensore (pseudo)metrico

$$\boldsymbol{\eta} := \eta_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

dove (x^0, x^1, x^2, x^3) sono un sistema di coordinate minkowskiane, il tensore metrico di sopra assume forma diagonale $diag(-1, 1, 1, 1)$ canonica ovunque su M^4. Ulteriormente, in virtù di (3.2), la analoga metrica che viene definita usando un altro sistema di coordinate minkowskiane coincide con $\boldsymbol{\eta}$ stessa. In altre parole possiamo definire $\boldsymbol{\eta}$ direttamente nello spazio delle traslazioni dello spazio affine e poi indurlo sullo spazio affine in modo canonico (vedi Appendice A). In tal modo risulta provato che:
la classe dei sistemi di coordinate minkowskiane determina univocamente una (pseudo)metrica con segnatura $(1, 3)$ su M^4, che in tal modo diventa una varietà Lorentziana (vedi Appendice B) globalmente piatta, in cui i sistemi di coordinate minkowskiani sono tutti e soli i sistemi di coordinate cartesiane pseudo ortonormali. Il gruppo $O(1, 3)$ coincide con il gruppo di stabilità della (pseudo)metrica di tale varietà (vedi Appendice B).

Tutto ciò conduce ad enunciare la seguente definizione, "dimenticando" la costruzione euristica fatta fino ad ora e ridefinendo i sistemi di coordinate minkowskiani.

Definizione 3.1. (**Lo spaziotempo della Teoria della Relatività Speciale**.) Lo spaziotempo della Teoria della Relatività Speciale $\mathbb{M}^4$, detto **spaziotempo di Minkowski**, è una varietà differenziabile a 4 dimensioni, con metrica Lorentziana $\boldsymbol{\eta}$ globalmente piatta.
I sistemi di coordinate cartesiane pseudo ortonormali rispetto a $\boldsymbol{\eta}$ sono detti **sistemi di coordinate minkowskiane** di $\mathbb{M}^4$. Indicheremo con $\mathfrak{M}$ la classe dei sistemi di coordinate minkowskiane sullo spaziotempo. $\diamondsuit$

Il passo successivo è quello di dare una definizione formale di sistema di riferimento inerziale nel contesto geometrico differenziale appena introdotto. Ovviamente tale definizione deve determinare i sistemi di riferimento inerziali già introdotti in modo euristico nella costruzione appunto euristica che ci ha portato allo spaziotempo visto come varietà Lorentziana. L'idea è quella di definire i sistemi di riferimento inerziali partendo dalle coordinate minkowskiane che abbiamo formalmente (ri)definito sopra. Tuttavia, prima di fare ciò dobbiamo fissare la "direzione del tempo" nella classe $\mathfrak{M}$ delle coordinate minkowskiane sullo spaziotempo, selezionando la sottoclasse delle coordinate minkowskiane nelle quali "il tempo scorre verso il futuro".

[1]Le richieste sull'applicazione $(p, q) \mapsto \overrightarrow{pq}$ sono che (i) per ogni $p \in M^4$ e $u \in V$ esiste un unico $q \in M^4$ con $\overrightarrow{pq} = u$ e (ii) $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$ per ogni $p, q, r \in M^4$.

3.1.1 Orientazione temporale dei sistemi di coordinate minkowskiane.

Come notato precedentemente, solo le trasformazioni del gruppo *ortocrono* di Poincaré hanno significato fisico, se vogliamo attribuire alle coordinate minkowskiane il significato di coordinate fisiche associate ad osservatori. Infatti solo le trasformazioni ortocrone non invertono il senso dello scorrere del tempo. Usando il gruppo ortocrono, definiamo in $\mathfrak{M}$ la seguente relazione:

$$\text{se} \quad \phi, \phi' \in \mathfrak{M}\,, \quad \phi' \sim \phi \quad \text{se e solo se} \quad \phi' \circ \phi^{-1} \in IO(1,3)\uparrow . \tag{3.3}$$

Proposizione 3.1. *La relazione $\sim$ definita su $\mathfrak{M}$ in (3.3) è una relazione di equivalenza che ammette due sole classi di equivalenza.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. Dato che $IO(1,3)\uparrow$ è un gruppo valgono i seguenti fatti. $\phi \circ \phi^{-1} = id \in IO(1,3)\uparrow$, per cui $\sim$ è *riflessiva.* Inoltre se $\phi' \circ \phi^{-1} \in IO(1,3)\uparrow$ allora $\phi \circ \phi'^{-1} = (\phi' \circ \phi^{-1})^{-1} \in IO(1,3)\uparrow$, per cui $\sim$ è *simmetrica.* Infine se $\phi_1 \circ \phi_2^{-1} \in IO(1,3)\uparrow$ e $\phi_2 \circ \phi_3^{-1} \in IO(1,3)\uparrow$ allora $\phi_1 \circ \phi_3^{-1} = (\phi_1 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ \phi_3^{-1}) \in IO(1,3)\uparrow$, per cui $\sim$ è anche *transitiva.* In definitiva $\sim$ è una relazione di equivalenza. Proviamo che ci sono solo due classi di equivalenza. Preso $\phi \in \mathfrak{M}$ consideriamo $\phi' := \mathscr{P}_{(0,T)} \circ \phi$, per costruzione $\phi' \in \mathfrak{M}$ e $\phi \not\sim \phi'$ dato che $\phi' \circ \phi^{-1} = \mathscr{P}_{(0,T)} \not\in IO(1,3)\uparrow$ visto che $T \not\in O(1,3)\uparrow$. Quindi ci sono *almeno* due classi di equivalenza: quella di ϕ e quella di ϕ'. Per provare che sono le uniche due è sufficiente dimostrare che se $\phi_1 \in \mathfrak{M}$ e vale $\phi \not\sim \phi_1$, allora $\phi' \sim \phi_1$. Eccone la prova. $\phi \not\sim \phi_1$ significa $\phi \circ \phi_1^{-1} \not\in IO(1,3)\uparrow$. Per (iii) in (3) in teorema 2.3 questo equivale a dire che $\mathscr{P}_{(0,T)} \circ (\phi \circ \phi_1^{-1}) \in IO(1,3)\uparrow$ che equivale, a sua volta, a $(\mathscr{P}_{(0,T)} \circ \phi) \circ \phi_1^{-1} \in IO(1,3)\uparrow$, cioé : $\phi' \circ \phi_1^{-1} \in IO(1,3)\uparrow$, che significa, come volevamo, $\phi' \sim \phi_1$. $\square$

Se i sistemi di coordinate Minkowskiane ϕ, ϕ' appartengono alla stessa classe di equivalenza, e solo allora, la trasformazione di coordinate tra tali sistemi di coordinate è elemento del gruppo ortocrono di Poincaré . Dal punto di vista fisico, fissare un'orientazione temporale nella classe delle coordinate minkowskiane significa dichiarare in quale delle due classi disgiunte di sistemi di coordinate minkowskiane "si vede il tempo scorrere in avanti". Ha allora senso dare la seguente definizione.

Definizione 3.2. La scelta di una delle due classi di equivalenza suddette, che indicheremo con $\mathfrak{M}\uparrow$ (e la rimanente con $\mathfrak{M}\downarrow$) si dice **orientazione temporale** di $\mathfrak{M}$. Se $\phi \in \mathfrak{M}\uparrow$ si dice che ϕ è **orientato positivamente nel tempo**. $\diamondsuit$

Nota 3.1. D'ora in poi lavoreremo solo con sistemi di coordinate minkowskiane in $\mathfrak{M}\uparrow$.

3.1.2 Sistemi di Riferimento inerziali.

Ora possiamo dare una definizione geometrica di sistema di riferimento inerziale. L'idea fisica è che due sistemi di coordinate minkowskiane definiscano lo stesso sistema di riferimento quando sono connessi da una rototraslazione spaziale e/o da una traslazione temporale costanti nel tempo. Dal punto di vista matematico, tale idea è supportata dal fatto che le trasformazioni

$$\Omega_R := \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right] , \tag{3.4}$$

dove $R \in O(3)$ sono elementi di $O(1,3)\uparrow$ come si prova per computo diretto. Di conseguenza le trasformazioni $\mathscr{P}_{(C,\Omega_R)}$ appartengono a $IO(1,3)\uparrow$ per ogni $C \in \mathbb{R}^4$ e ogni $R \in O(3)$.
Definiamo in $\mathfrak{M}\uparrow$ la seguente relazione:

$$\text{se} \quad \phi, \phi' \in \mathfrak{M}\uparrow\,, \quad \phi \sim \phi' \quad \text{se e solo se} \quad \phi' \circ \phi^{-1} = \mathscr{P}_{(C,\Omega_R)} \text{ per qualche } C \in \mathbb{R}^4 \text{ e } R \in O(3)\,.$$

È immediato verificare che si tratta di una relazione di equivalenza. Gli elementi $\mathscr{F}$ dello spazio quoziente $\mathfrak{M}\uparrow / \sim$, ossia le classi di equivalenza associate a tale relazione, saranno per definizione, i sistemi di riferimento inerziali.

Definizione 3.3. (**Sistemi di riferimento inerziali**.) Le classi di equivalenza associate alla relazione di equivalenza su $\mathfrak{M}\uparrow$,

$$\text{se} \quad \phi, \phi' \in \mathfrak{M}\uparrow\,, \quad \phi \sim \phi' \quad \text{se e solo se} \quad \phi' \circ \phi^{-1} = \mathscr{P}_{(C,\Omega_R)} \text{ per qualche } C \in \mathbb{R}^4 \text{ e } R \in O(3)\,,$$

sono dette **sistemi di riferimento inerziali**. L'insieme dei sistemi di riferimento inerziali sarà indicato con $\mathfrak{S}$. Se $\mathscr{F} \in \mathfrak{S}$ e $\phi \in \mathscr{F}$, si dice che ϕ è un sistema di coordinate minkowskiane **solidali con** $\mathscr{F}$. $\diamondsuit$

Commenti 3.1.
(1) Notiamo che per costruzione se $\phi, \phi' \in \mathfrak{M}\uparrow$ sono solidali con il sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$, posto $\phi : \mathbb{M}^4 \ni p \mapsto (x^0(p), x^1(p), x^2(p), x^3(p))$ e $\phi' : \mathbb{M}^4 \ni p \mapsto (x'^0(p), x'^1(p), x'^2(p), x'^3(p))$, le funzioni, coordinate temporali, $p \mapsto x^0(p)$ e $p \mapsto x'^0(p)$ saranno legate dalla relazione $x'^0(p) = x^0(p) + k$, dove $k \in \mathbb{R}$ è una costante indipendente da p. Di conseguenza:

$$\frac{\partial}{\partial x^0}|_p = \frac{\partial}{\partial x'^0}|_p =: \partial_{\mathfrak{F}}$$

Viene in tal modo definito un campo vettoriale controvariante associato a $\mathscr{F}$ ed indipendente dalla scelta del sistema di coordinate minkowskiane scelto in $\mathscr{F}$. Vale banalmente $\boldsymbol{\eta}(\partial_{\mathscr{F}}|\partial_{\mathscr{F}}) = -1$. Si noti infine che, dato che al variare di p, i vettori $\frac{\partial}{\partial x^0}|_p$ hanno sempre le stesse componenti in coordinate cartesiane, essi determinano un unico vettore, indicato sempre con $\partial_{\mathscr{F}}$, nello spazio delle traslazioni dello spazio affine (vedi Appendice A).
(2) Se $\phi, \phi' \in \mathscr{F} \in \mathfrak{S}$, con ovvie notazioni, la classe di sottovarietà a due a due disgiunte la cui unione coincide con tutto $\mathbb{M}^4$

$$\left\{\Sigma_{\mathscr{F}t} := \{q \in \mathbb{M}^4 \mid x^0(q) = t\}\right\}_{t\in\mathbb{R}} \;,$$

coincide con la classe di sottovarietà

$$\left\{\Sigma'_{\mathscr{F}t} := \{q \in \mathbb{M}^4 \mid x'^0(q) = t\}\right\}_{t' \in \mathbb{R}} .$$

Tuttavia il risultato *non* vale se ϕ e ϕ' appartengono a due diversi sistemi di riferimento inerziali.
(3) Fissato $\mathscr{F} \in \mathfrak{S}$, le sottovarietà $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ ricevono naturalmente una struttura di spazio affine indotta da quella di $\mathbb{M}^4$ in cui il sistema di coordinate x^1, x^2, x^3 indotte da qualunque $\phi \in \mathscr{F}$ sono un sistema di coordinate cartesiane.
(4) Fissato $\mathscr{F} \in \mathfrak{S}$, il tensore metrico $\boldsymbol{\eta}_{\mathscr{F}t}$ indotto da $\boldsymbol{\eta}$ su ogni $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ risulta essere a segnatura ellittica e ciò rende ogni $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ una varietà riemanniana. Tale metrica riemanniana, dal punto di vista fisico è la metrica che corrisponde agli strumenti di misura delle lunghezze spaziali (regoli ideali) in quiete con $\mathscr{F}$. La distanza d_t sullo spazio di quiete con $\mathscr{F}$, $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ soddisfa:

$$d_{\mathscr{F}t}(P, Q) = \sqrt{\eta_{ij}(x^i(p) - x^i(q))(x^j(p) - x^j(q))} ,$$

dove $p, q \in \mathbb{M}^4$ sono gli eventi corrispondenti ai punti P, Q nello spazio di quiete con $\mathscr{F}$ ad un uguale tempo fissato.
(5) Fissato $\mathscr{F} \in \mathfrak{S}$, come è immediato verificare, ogni sistema di coordinate cartesiane indotto su $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ da un sistema di coordinate minkowskiane $\phi \in \mathscr{F}$ (semplicemente fissando la coordinata temporale al valore prestabilito da t di $\Sigma_{\mathscr{F}t}$) è un sistema di coordinate cartesiane ortonormali per $\boldsymbol{\eta}_{\mathscr{F}t}$. Quindi ogni $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ è una sottovarietà di $\mathbb{M}^4$ che è anche varietà riemanniana globalmente piatta, cioè uno spazio euclideo.
(6) Se $\mathscr{F} \in \mathfrak{S}$, il campo $\partial_{\mathscr{F}}$ risulta essere ortogonale all'unica Σ_t che passa per p, nel senso che i prodotti scalari tra $\frac{\partial}{\partial x^0}$ ed i vettori $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \in T_p\Sigma_t$, $\alpha = 1, 2, 3$ risultano tutti nulli.
(7) Le linee integrali del campo $\partial_{\mathscr{F}}$ suddetto sono sotto varietà differenziabili unidimensionali embedded in $\mathbb{M}^4$ su cui $-\boldsymbol{\eta}$ (notare il segno!) induce una metrica ellittica, le risultanti varietà riemanniane sono globalmente piatte. Tale metrica riemanniana, dal punto di vista fisico è la metrica che corrisponde agli strumenti di misura degli intervalli temporali (orologi ideali) in quiete con $\mathscr{F}$. L'intervallo di tempo trascorso per $\mathscr{F}$ tra due eventi $p, q \in \mathbb{M}^4$ con le stesse coordinate minkowskiane spaziali (x^1, x^2, x^3) in $\mathscr{F}$ è ancora

$$\Delta t_{\mathscr{F}}(p, q) = \frac{1}{c}\sqrt{-\eta_{ij}(x^i(p) - x^i(q))(x^j(p) - x^j(q))} .$$

(8) È chiaro che, riferendosi alle definizioni euristiche date nella sezione 1.2, ogni coordinata temporale x^0 di quelle considerate sopra e riferite ad uno stesso $\mathscr{F} \in \mathfrak{S}$ altro non è che $ct_{\mathscr{F}} + k'$ per qualche costante $k' \in \mathbb{R}$, dove $t_{\mathscr{F}}$ era la coordinata temporale del riferimento $\mathscr{F}$. Similmente, lo spazio di quiete con $\mathscr{F}$, $\mathbb{E}^3_{\mathscr{F}}$, si può identificare come varietà riemanniana globalmente piatta (cioè spazio euclideo) con una qualsiasi delle sottovarietà Σ_t.

Definizione 3.4. (**Strutture geometriche nei sistemi di riferimento inerziali**.) Sia $\mathscr{F}$ un sistema di riferimento inerziale in $\mathbb{M}^4$.
(a) Il campo vettoriale $\partial_{\mathscr{F}}$ (con $\boldsymbol{\eta}(\partial_{\mathscr{F}}|\partial_{\mathscr{F}}) = -1$), dato in ogni evento dal vettore tangente

alla coordinata temporale di un qualsiasi $\phi \in \mathscr{F}$ è detto **campo vettoriale temporale** (o semplicemente **vettore temporale**) associato a $\mathscr{F}$. La metrica euclidea indotta da $-\boldsymbol{\eta}$ sulle sottovarietà unidimensionali curve integrali del campo $\partial_{\mathscr{F}}$, è detta **metrica temporale** di $\mathscr{F}$.
(b) Se $\phi \in \mathscr{F}$ e x^0 è la prima funzione coordinata di $\phi \in \mathscr{F}$, $t_{\mathscr{F}} := x^0/c : \mathbb{M}^4 \to \mathbb{R}$ definita a meno di costanti additive è detta **coordinata temporale** (globale) di $\mathscr{F}$. Ogni sottovarietà tridimensionale (ovunque normale a $\partial_{\mathscr{F}}$), $\Sigma_{\mathscr{F}t} := \{p \in \mathbb{M}^4 | t_{\mathscr{F}}(p) = t\}$, è detta **spazio di quiete di $\mathscr{F}$ al tempo** t. La metrica euclidea indotta da $\boldsymbol{\eta}$ su $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ è detta **metrica spaziale** di $\mathscr{F}$ al tempo t. $\diamondsuit$

Dalla definizione data e dalla discussione precedente risulta chiaro che all'interno di un fissato riferimento inerziale la struttura geometrica è la stessa che si aveva in meccanica classica. Le differenze nascono quando si considerano due diversi riferimenti inerziali. In tal caso, a differenza della meccanica classica, ogni sistema di riferimento inerziale ha la propria classe di spazi di quiete a tempo fissato. Tali spazi non coincidono più se si considerano sistemi di riferimento inerziali differenti. Lo stesso fatto accade per le coordinate temporali di differenti riferimenti. Tale situazione è responsabile dei fenomeni di "dilatazione degli intervalli di tempo" e "contrazione delle lunghezze spaziali" che esamineremo più avanti.
Nella Relatività non c'è un modo univoco di separare lo "spazio dal tempo" nello spaziotempo. Per tale motivo lo spaziotempo acquista un'importanza superiore rispetto allo spazio ed al tempo separatamente: gli oggetti fisici devono essere visti e descritti come oggetti spaziotemporali.

Nota 3.2. Alla fine del nostro ragionamento euristico abbiamo visto che le coordinate cartesiane ortonormali nello spaziotempo definiscono solo sistemi di riferimento inerziali. Ci si può chiedere se esistano altri sistemi di riferimento che non siano inerziali, ma che diano luogo a sistemi di coordinate globali, in cui lo spazio di quiete sia ancora uno spazio euclideo (rispetto alla metrica indotta da $\boldsymbol{\eta}$) isometrico a $\mathbb{E}^3$ la cui unione è tutto lo spaziotempo. Si può mostrare che la risposta è negativa. In ogni caso la definizione di *sistema di riferimento generale* può essere nuovamente considerata, fuori dal contesto euristico iniziale, una volta che la struttura fisico-geometrica della relatività sia stata completata. Tale analisi è necessaria per fondare la Teoria della Relatività Generale.

3.1.3 Riduzione a trasformazioni di Lorentz speciali.

Per concludere diamo un teorema tecnico che dimostreremo in un prossimo capitolo e che traduce in termini matematici ciò che ci si aspetta dall'intuizione fisica: presi due sistemi di riferimento inerziali $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ è sempre possibile trovare sistemi di coordinate minkowskiane solidali con ciascuno di essi in modo tale che la trasformazione di coordinate sia una trasformazione speciale di Lorentz lungo l'asse x^3.

Teorema 3.1. *Se $\mathscr{F}, \mathscr{F}' \in \mathfrak{S}$, esistono $\phi \in \mathscr{F}$ e $\phi' \in \mathscr{F}'$ tali che $\phi' \circ \phi^{-1}$ è una trasformazione* *speciale di Lorentz lungo x^3, ossia è rappresentata da una matrice di $O(1,3)\uparrow$ della forma*

$$\Lambda := \left[\begin{array}{c|ccc} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v/c \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{array}\right]$$

dove $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ e $v \in (-c, c)$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. La tesi segue dal teorema 7.7 come provato nella nota 7.2. $\square$.

3.2 Alcune nozioni geometriche elementari in varietà Lorentziana quadridimensionali $(M, \mathbf{g})$.

Introdurremo ora una classificazione dei vettori in $\mathbb{M}^4$ ed alcune strutture geometriche associate di larghissimo uso nelle teorie relativistiche. In Appendice B sono riassunte alcune nozioni utili che adopereremo di seguito. Per maggiore generalità daremo le definizioni nel caso generale di una varietà Lorentziana quadridimensionale generica $(M, \mathbf{g})$, dato che tali nozioni sono usate anche in Relatività Generale. Una giustificazione della terminologia introdotta sarà data successivamente nel caso minkowskiano. Assumeremo sempre, nel caso generico, che la varietà e la metrica siano "smooth" cioè di classe C^∞, inoltre la nozione di variet 'a che usiamo include la richiesta che la varietà sia uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile.

Definizione 3.5. Se $(M, \mathbf{g})$ è una varietà quadridimensionale lorentziana, in particolare $M = \mathbb{M}^4$ e $\mathbf{g} = \boldsymbol{\eta}$, per ogni $x \in M$, i vettori $v \in T_xM \setminus \{0\}$ vengono classificati come segue:
(a) v è di **tipo spazio** se $\mathbf{g}(v|v) > 0$;
(b) v è di **tipo tempo** se $\mathbf{g}(v|v) < 0$; l'insieme dei vettori di tipo tempo in T_xM è indicato con $\mathcal{I}_x$ e viene detto **cono temporale** in x;
(c) v è di **tipo luce** se $\mathbf{g}(v|v) = 0$; l'insieme contenente il vettore nullo e i vettori di tipo luce in T_xM viene detto **cono di luce** in x;
(d) v è di **tipo causale** se v è indifferentemente di tipo tempo o di tipo luce; l'insieme contenente il vettore nullo e i vettori causali in T_xM è indicato con $\mathcal{J}_x$ e viene detto **cono causale** in x.
La terminologia si estende ai campi vettoriali controvarianti in modo naturale (es. un campo vettoriale controvariante è detto di tipo tempo se in ogni punto della varietà determina un vettore di tipo tempo) ed ai vettori covarianti $q \in T_x^*M \setminus \{0\}$ ed ai campi vettoriali covarianti in modo naturale (es. un vettore covariante è detto di tipo tempo il corrispondente vettore controvariante, ottenuto attraverso l'isomorfismo naturale tra lo spazio dei vettori controvarianti e quello dei vettori covarianti generato dalla metrica, è di tipo tempo).
$\diamondsuit$

Nota 3.3. Il vettore nullo 0 *non* è classificato in alcun modo nella definizione di sopra anche se appartiene, per definizione a $\mathfrak{J}_x$.

Possiamo dare una corrispondente definizione per le sottovarietà embedded di dimensione 3.
Se S è una sottovarietà embedded $(n-1)$-dimensionale della varietà differenziabile n-dimensionale M, nell'intorno di ogni punto $p \in S$ essa è individuata dal luogo dei punti $q \in M$ che soddisfano (1) $f(q) = 0$, dove $f : M \to \mathbb{R}$ è una certa funzione differenziabile con (2) $df_p \neq 0$. Dimostriamo questa affermazione. L'esistenza di f deriva dalla richiesta che S sia una sottovarietà embedded di co-dimensione 1. Per definizione, nell'intorno in M di $p \in S$ deve allora esistere un sistema di coordinate $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ in cui S è descritta come il luogo dei punti (nell'intorno detto) con $x^0 = 0$ e le $x^1, \ldots, x^{n-1}$ definiscono una carta locale di S nell'intorno di p. Dato che vale ovviamente $dx^0 \neq 0$, possiamo dunque definire una f che soddisfi (1) e (2) come la funzione coordinata x^0 in un intorno in M di p (e in qualsiasi altro modo fuori da tale intorno). Ogni (altra) funzione $f : M \to \mathbb{R}$ che soddisfa (1) e (2) nell'intorno di p, avrà differenziale in p dato da: $df_p = \frac{\partial f}{\partial x^0}|_p dx^0 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}|_p dx^\alpha$. La richiesta di validità di (1) e la natura delle coordinate $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ implicano immediatamente che $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}|_p = 0$ per $\alpha = 1, \ldots, n-1$. La richiesta di validità di (2) implica allora che $\frac{\partial f}{\partial x^0}|_p \neq 0$. Concludiamo che, nella classe di tutte le funzioni $f : M \to \mathbb{R}$ che soddisfano i requisiti (1) e (2) rispetto a S e p, il differenziale df_p è determinato a meno di un fattore non nullo.
Per definizione $n_p := df_p$ è il **covettore normale** a S in p, esso è definito a meno di un fattore non nullo. Vale infine la relazione, che può essere usata per definire alternativamente, ma equivalentemente, n_p:

$$\langle n_p, Y_p \rangle = 0 \quad \text{se e solo se } Y_p \in T_pS. \tag{3.5}$$

Per provarla, ricordiamo che le $n-1$ coordinate $x^1, \ldots, x^{n-1}$ introdotte sopra definiscono un sistema locale di coordinate su S nell'intorno di p e quindi $\{\partial/\partial x^\alpha|_p\}_{\alpha=1,\ldots,n-1}$ è una base di T_pS e, conseguentemente, $\langle dx^0, \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \rangle = 0$ per $\alpha = 1, \ldots, n-1$. Dato che dx^0_p coincide con n_p a meno di un fattore non nullo, $\langle dx^0, \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \rangle = 0$ per $\alpha = 1, \ldots, n-1$ implica l'identità in (3.5) se $Y_p \in T_pS$. Viceversa se $Y_p \in T_pM$, decomponendo tale vettore sulla base dei vettori $\partial/\partial x^a|_p$ con $a = 0, 1, \ldots, n-1$ e tenendo conto del fatto che $\langle dx^a_p, \partial/\partial x^b|_p \rangle = \delta^a_b$, la validità dell'identità in (3.5) implica che la componente lungo $\partial/\partial x^0|_p$ deve essere nulla. Quindi Y_p è combinazione lineare dei vettori $\partial/\partial x^\alpha|_p$ con $\alpha = 1, \ldots, n-1$ cioé è un elemento di T_pS.

Definizione 3.6. Se S è una sottoavarietà embedded tridimensionale della varietà lorentziana quadridimensionale $(M, \mathbf{g})$, S è detta essere: di **tipo spazio** se il suo covettore normale è di tipo tempo, **di tipo tempo** se il suo covettore normale è di tipo spazio, **di tipo luce** (equivalentemente **di tipo nullo**) se il suo covettore normale è di tipo luce.
$\diamondsuit$

Vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.2. *Se S è una sottovarietà embedded tridimensionale della varietà lorentziana quadridimensionale $(M, \mathbf{g})$, S è di tipo spazio se e solo se lo spazio tangente a S in ogni suo punto è un sottospazio di T_pM formato da vettori di tipo spazio.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. Per ogni $p \in S$, consideriamo il vettore controvariante $N_p \in T_pM$ che otteniamo alzando l'indice del covettore normale: $N_p^a := g^{ab}(n_p)_b$ (in forma intrinseca $n_p := \mathbf{g}(N_p|\cdot)$). In virtù della (3.5), N_p sarà normale al piano tangente di S in p.
Assumiamo ora che S sia di tipo spazio, e quindi n_p e N_p siano di tipo tempo, e proviamo che i vettori di T_pS sono tutti di tipo spazio. Possiamo ridefinire N_p, moltiplicandolo per un fattore non nullo, in modo che valga $\mathbf{g}(N_p|N_p) = -1$. Nelle ipotesi fatte possiamo quindi completare N_p a base di T_pM aggiungendo 3 vettori $\vec{e}_\alpha$, con $\alpha = 1, 2, 3$, normali a N_p (che quindi, per (3.5), devono essere tre elementi linearmente indipendenti di T_pS e quindi una base di esso) che siano a due due ortogonali e normalizzati come $\mathbf{g}(\vec{e}_\alpha|\vec{e}_\alpha) = \pm 1$. Dato che la metrica deve essere di tipo iperbolico normale e diagonale nella base $\{N_p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e sappiamo che $\mathbf{g}(N_p|N_p) = -1$, deve risultare $\mathbf{g}(\vec{e}_\alpha|\vec{e}_\alpha) = 1$. Di conseguenza i vettori $\vec{e}_\alpha$ sono di tipo spazio e lo sono tutte le loro combinazioni lineari, cioé i vettori di T_pS.
Assumiamo ora che i vettori di T_pS sono di tipo spazio e proviamo che S è di tipo spazio. In tali ipotesi saranno di tipo spazio anche tre vettori di una base ortonormale di T_pS. Possiamo completare a base di T_pM tale terna di vettori con un quarto vettore N_p normale ad essi. Tale vettore, se normalizzato, può solo soddisfare $\mathbf{g}(N_p|N_p) = -1$, dato che la metrica è di tipo iperbolico normale e deve essere in forma canonica nella base detta. Per costruzione il vettore $n_p := \mathbf{g}(N_p|\cdot)$ soddisfa l'identità in (3.5) ed è quindi il covettore normale a S in p. Per costruzione n_p è di tipo tempo e quindi S è di tipo tempo dato che $p \in S$ è qualunque. $\Box$

È evidente che quando fissiamo un sistema di riferimento $\mathscr{F}$ nello spaziotempo di Minkowski $\mathbb{M}^4$, le sottovarietà $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ definente lo spazio di quiete al tempo t del riferimento sono sottovarietà tridimensionali embedded di tipo spazio. Tuttavia non sono le uniche possibili anche nello spaziotempo di Minkowski. In generale si possono costruire sottovarietà di tipo spazio che risultano essere curve rispetto alla metrica indotta $\mathbf{h}$, mentre le $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ sono globalmente piatte per costruzione.

Nota 3.4.
(1) Se S è una sottovarietà embedded di M, i vettori tangenti a S si possono pensare come vettori tangenti a M. In questo modo la metrica $\mathbf{g}$ di M valutata in un punto $p \in S$ induce una forma quadratica $\mathbf{h}$ (un tensore covariante doppio simmetrico) su ogni T_pS, che si dice **metrica indotta** su S. A causa dell'embedding smooth, $\mathbf{h}$ definisce un campo tensoriale smooth su S. Tuttavia $\mathbf{h}$ potrebbe essere degenere e quindi non rappresentare un vero tensore metrico e nemmeno un tensore pseudo-metrico su S.
In base alla proposizione 3.2, la sottovarietà tridimensionale embedded $S \subset M$ è di tipo spazio se e solo se la metrica $\mathbf{h}$ indotta dalla metrica lorentziana dello spaziotempo $\mathbf{g}$ su Σ è definita positiva, cioè è un prodotto scalare propriamente detto. In tal modo $(\Sigma, \mathbf{h})$ è una *varietà riemanniana* in senso proprio.

(2) Seguendo la stessa dimostrazione della proposizione 3.2 si verifica che S risulta essere di tipo tempo se e solo se la metrica indotta $\mathbf{h}$ su S è ancora una metrica lorentziana (in dimensione 3 in questo caso), in tal modo $(S, \mathbf{h})$ è una varietà lorentziana di dimensione 3.
(3) Se Σ è di tipo luce se allora la metrica indotta $\mathbf{h}$ è degenere, perché il vettore controvariante associato a n_p risulta essere tangente a Σ in ogni punto p, ma risulta anche essere di tipo nullo.

3.2.1 Coni spaziotemporali.

La struttura degli insiemi contenenti i tipi di vettori della definizione 3.5 è piuttosto interessante. Se fissiamo una base pseudo ortonormale in T_xM (in particolare nel caso $M = \mathbb{M}^4$), $B = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ con $\mathbf{g}(e_0|e_0) = -1$ (e quindi $\mathbf{g}(e_\alpha|e_\alpha) = 1$), risulta chiaro che un vettore $v = v^i e_i \neq 0$: è di tipo tempo se e solo se

$$(v^0)^2 > \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 \,.$$

è di tipo causale se e solo se

$$(v^0)^2 \geq \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 > 0 \,,$$

mentre è di tipo luce se e solo se

$$(v^0)^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 > 0 \,,$$

Passiamo ora a studiare con maggior dettaglio la struttura di $\mathcal{I}_x$. Vale la seguente importante proposizione.

Proposizione 3.3. *In riferimento alla definizione 3.5, per ogni $x \in T_xM$, l'insieme $\mathcal{I}_x$ risulta essere unione sconnessa di due insiemi aperti e connessi, $\mathcal{I}_{1x}$ e $\mathcal{I}_{2x}$ detti* **falde** *di $\mathcal{I}_x$, nella topologia indotta su $\mathcal{I}_x$ da quella dello spazio tangente. Vale inoltre quanto segue.*
(a) *$\mathcal{I}_{1x}$ e $\mathcal{I}_{2x}$ risultano essere insiemi conici: se $u, v \in \mathcal{I}_{1x}$ (risp. $\mathcal{I}_{2x}$) allora $au + bv \in \mathcal{I}_{1x}$ (risp. $\mathcal{I}_{2x}$) per ogni coppia $a, b > 0$.*
(b) *Fissata una base pseudo ortonormale $B = \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \subset T_xM$, $\mathcal{I}_{1x}$ e $\mathcal{I}_{2x}$ sono individuati da, non necessariamente in quest'ordine:*

$$\left\{ v \in T_xM \;\middle|\; (v^0)^2 > \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 \;,\; v^0 > 0 \right\} \quad e \quad \left\{ v \in T_xM \;\middle|\; (v^0)^2 > \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 \;,\; v^0 < 0 \right\} .$$

(c) *Se $u_x, v_x \in \mathcal{I}_x$ allora $\mathbf{g}(u_x|v_x) \neq 0$, in particolare u_x, v_x appartengono alla stessa falda se e solo se $\mathbf{g}(u_x|v_x) < 0$ ed appartengono a falde diverse se e solo se $\mathbf{g}(u_x|v_x) > 0$.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. Dimostriamo contemporaneamente la prima parte della tesi ed i punti (a) e (b). Fissata la base pseudo ortonormale $B = \{e_0, e_1, e_2, e_3\} \subset T_xM$, l'insieme $\mathcal{I}_x$ è dato dai vettori $v_x = v^i e_i$ che soddisfano

$$(v^0)^2 > \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 \,,$$

per cui si decompone nell'unione disgiunta dei due sottoinsiemi:

$$C_{B>} := \left\{ v \in T_xM \;\middle|\; (v^0)^2 > \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 \;\;,\;\; v^0 > 0 \right\}$$

e

$$C_{B<} := \left\{ v \in T_xM \;\middle|\; (v^0)^2 > \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 \;\;,\;\; v^0 < 0 \right\} .$$

È chiaro che tali insiemi sono separatamente aperti e connessi nella topologia di $\mathbb{R}^4$ che è omeomorfa a quella di T_xM tramite l'omeomorfismo dato dalla trasformazione lineare non singolare che associa le componenti di un vettore con il vettore stesso. Quindi $C_{B>}$ e $C_{B<}$ coincidono con le componenti connesse di $\mathcal{I}_x$. Inoltre è evidente che si tratta di insiemi conici. Se cambiamo base, scegliendo un'altra base pseudo ortonormale $B' = \{e'_0, e'_1, e'_2, e'_3\}$ in T_pM, possiamo definire gli analoghi insiemi $C_{B'>}$ e $C_{B'<}$ che risulteranno ancora coincidere con le componenti connesse di $\mathcal{I}_x$. Essendo queste definite univocamente dalla topologia di T_xM, dovrà essere $C_{B'>} \equiv C_{B>}$ e $C_{B'<} \equiv C_{B<}$ oppure $C_{B'>} \equiv C_{B<}$ e $C_{B'<} \equiv C_{B>}$, dove il simbolo $\equiv$ indica che i corrispondenti insiemi di T_xM coincidono.
(c) Se $u_x, v_x \in \mathcal{I}_x$, allora, rispetto alla base pseudo ortonormale B: $(v^0)^2 > \sum_{\alpha=1}^{3}(v^\alpha)^2$ e $(u^0)^2 > \sum_{\alpha=1}^{3}(u^\alpha)^2$, per cui

$$(v^0u^0)^2 > \left(\sum_{\alpha=1}^{3}(v^\alpha)^2\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{3}(u^\alpha)^2\right) \geq \left(\sum_{\alpha=1}^{3} v^\alpha u^\alpha\right)^2 ,$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Schwartz nell'ultimo passaggio. Ma allora

$$\mathbf{g}(v_x|u_x) = -(v^0u^0) + \sum_{\alpha=1}^{3} v^\alpha u^\alpha \neq 0$$

ed ha segno positivo se e solo se $v^0u^0 < 0$ e cioè u_x e v_x appartengono a falde opposte, oppure negativo se e solo se $v^0u^0 > 0$ e cioé u_x e v_x appartengono alla stessa falda. $\Box$

Abbiamo provato che, indipendentemente dalla scelta della base, $\mathcal{I}_x$ risulta essere un *insieme aperto e sconnesso* dato da un cono a due falde (aperte e connesse) di vertice nell'origine. Valendo che $v_x \in \mathscr{J}_x$, se e solo se le sue componenti soddisfano:

$$(v^0)^2 \geq \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 \,,$$

e tenuto conto che la topologia di $\mathbb{R}^4$ è omeomorfa a quella di T_xM (tramite l'omeomorfismo dato dalla trasformazione lineare non singolare che associa le componenti di un vettore con il vettore stesso) $\mathcal{J}_x$ risulta essere un *insieme chiuso e connesso.* $\mathcal{J}_x$ è la chiusura di $\mathcal{I}_x$. La frontiera di $\mathcal{I}_x$, che coincide con quella di $\mathcal{J}_x$, è l'insieme dei vettori di tipo luce in x unitamente al vettore nullo di T_xM.

Nota 3.5. *Le definizioni appena date valgono più in generale in riferimento ad una varietà lorentziana M di dimensione $n \geq 2$.*

Consideriamo ora in particolare il caso $M = \mathbb{M}^4$ e sfruttiamo la sua struttura affine.

Definizione 3.7. Nello spazio affine $\mathbb{M}^4$ attraverso l'applicazione che associa punti a vettori uscenti da un medesimo punto, cioè attraverso le coordinate cartesiane: $\mathcal{I}_x \subset T_x\mathbb{M}^4$ definisce $I_x \subset \mathbb{M}^4$ e $\mathcal{J}_x \subset T_x\mathbb{M}^4$ definisce $J_x \subset \mathbb{M}^4$. $\diamondsuit$

Dato che l'applicazione che associa punti a vettori uscenti da un medesimo punto è un omeomorfismo[2] da $T_x\mathbb{M}^4$ a $\mathbb{M}^4$, le proprietà topologiche dette sopra di $\mathcal{I}_x$ e $\mathcal{J}_x$ valgono immutate per I_x e J_x rispettivamente.

3.2.2 Orientazione temporale di una varietà Lorentziana $(M, \mathbf{g})$.

Vogliamo definire un'*orientazione temporale* di $\mathbb{M}^4$ tramite la struttura dei coni introdotta precedentemente. Lavoreremo nel caso generale di una varietà quadridimensionale lorentziana connessa $(M, \mathbf{g})$. Consideriamo, se esiste, un campo vettoriale Z controvariante di tipo tempo che sia (almeno) *continuo* su tutto M.

Definizione 3.8. Sia $(M, \mathbf{g})$ una varietà differenziabile quadridimensionale lorentziana di classe C^∞. Assumendo M connessa, si dice che M è **temporalmente orientabile**, se esiste su M un campo vettoriale controvariante Z di tipo tempo (almeno) continuo. $\diamondsuit$

Nota 3.6. Si osservi che la richiesta non è ovvia e ci sono varietà lorentziane in cui *non* è possibile definire alcun campo vettoriale controvariante di tipo tempo che risulti essere continuo su tutta la varietà. Tuttavia lo spaziotempo di Minkowski è banalmente temporalmente orientabile: un campo vettoriale Z con le caratteristiche di sopra esiste ed è dato, per esempio, dal campo $\partial_{\mathscr{F}}$ di un qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

Il campo Z selezionerà in ogni $x \in M$ uno solo degli insiemi $\mathcal{I}_{1x}$ e $\mathcal{I}_{2x}$ e avremo in tal modo definito un'applicazione, che assegna ad ogni punto $x \in M$ uno solo dei due insiemi $\mathcal{I}_{1x}$, $\mathcal{I}_{2x}$.

[2] La topologia su $\mathbb{M}^4$, che è uno spazio affine, è quella indotta su $\mathbb{M}^4$ dalle coordinate cartesiane a partire da quella di $\mathbb{R}^4$. Quest'ultima è banalmente omeomorfa a quella che abbiamo considerato sopra su $T_x\mathbb{M}^4$.

Definizione 3.9. Se $(M, \mathbf{g})$ è una varietà quadridimensionale lorentziana temporalmente orientabile, si fissi un campo vettoriale controvariante (almeno) continuo di tipo tempo Z definito su tutto M.
(a) l'applicazione $\mathcal{T}$ che assegna ad ogni punto $x \in M$ uno solo dei due insiemi $\mathcal{I}_{1x}$, $\mathcal{I}_{2x}$ è detta **orientazione temporale** di M (indotta da Z).
(b) (i) $\mathcal{I}_x^+ := \mathcal{T}(x)$ è detto **cono temporale futuro** in x e $\mathcal{I}_x^- := \mathcal{I}_x \setminus \mathcal{I}_x^+$ è detto **cono temporale passato** in x.
(ii) $\mathcal{J}_x^+ := \overline{\mathcal{I}_x^+}$, è detto **cono causale futuro** e $\mathcal{J}_x^- := \overline{\mathcal{I}_x^-}$ è detto **cono causale passato**.
(iii) I vettori causali in $\mathcal{J}_x^+$ sono detti **diretti verso il futuro**, i vettori causali in $\mathcal{J}_x^-$ sono detti **diretti verso il passato**.
(c) Nel caso in cui $M = \mathbb{M}^4$ valgono le seguenti ulteriori definizioni:
(i) Il **futuro temporale** (o **futuro cronologico**) di x, I_x^+, è dato dall'insieme degli eventi di $\mathbb{M}^4$ individuati dai vettori di $\mathcal{I}_x^+$ tramite la struttura affine di $\mathbb{M}^4$,
(ii) il **passato temporale** (o **passato cronologico**) di x, I_x^-, è dato dall'insieme degli eventi di $\mathbb{M}^4$ individuati dai vettori di $\mathcal{I}_x^-$ tramite la struttura affine di $\mathbb{M}^4$,
(iii) il **futuro causale** di x, J_x^+, è definito come $\overline{I_x^+}$,
(iv) il **passato causale** di x, J_x^-, è definito come $\overline{I_x^-}$. $\diamondsuit$

Nota 3.7. Si osservi che $\mathcal{J}_x^+$ e $\mathcal{J}_x^-$ contengono *anche* il vettore nullo che *non* è un vettore causale. Similmente J_x^+ e J_x^- includono anche il punto x.

Vale il seguente fondamentale risultato.

Proposizione 3.4. *Esistono e sono solo due le possibili orientazioni temporali per ogni varietà quadridimensionale lorentziana* $(M, \mathbf{g})$ *connessa e temporalmente orientabile (in particolare ciò vale per lo spaziotempo della relatività speciale* $\mathbb{M}^4$*).* $\diamondsuit$

Dimostrazione. Sia Z un campo vettoriale controvariante di tipo tempo che sia almeno continuo su M. Esso determina un'orientazione temporale di M. Una seconda e differente orientazione è individuata da $-Z$. Mostriamo che non ce ne sono altre. Se scegliamo un campo vettoriale controvariante continuo di tipo tempo Z', non necessariamente coincidente con $\pm Z$ e definito su tutto M, in virtù di (c) in proposizione 3.3 la funzione:

$$f : M \ni x \mapsto \frac{\mathbf{g}(Z_x|Z'_x)}{|\mathbf{g}(Z_x|Z'_x)|} ,$$

è ben definita in quanto il denominatore non si annulla mai. Essendo essa continua ed essendo M connessa, $f(M)$ deve essere una delle due componenti connesse di $\{-1, +1\}$ (con la topologia indotta da $\mathbb{R}$). Questo significa che il segno di $\mathbf{g}(Z_x|Z'_x)$ è costante su M. In base a (c) in proposizione 3.3, Z' apparterrà , per ogni $x \in M$, alla stessa falda di Z se $\mathbf{g}(Z|Z') < 0$ oppure apparterrà sempre alla falda a cui non appartiene Z, se $\mathbf{g}(Z|Z') > 0$. $\square$

3.3 La struttura causale di $\mathbb{M}^4$: causalità e linee di universo.

In questa sezione ci concentreremo sulla struttura geometrica dello spaziotempo di Minkowski $\mathbb{M}^4$ giustificando in termini fisici la terminologia precedentemente introdotta. Per prima cosa mostreremo che $\mathbb{M}^4$ ammette un'orientazione temporale indotta dalla classe dei sistemi di riferimento inerziali. Successivamente vedremo come la metrica $\boldsymbol{\eta}$ dello spaziotempo di Minkowski $\mathbb{M}^4$ sia connessa alla causalità.

3.3.1 Orientazione temporale indotta dai riferimenti inerziali in $\mathbb{M}^4$.

Per concludere studiamo la relazione tra sistemi di riferimento inerziali e coni temporali in $\mathbb{M}^4$. Come conseguenza di tale risultato segue anche che i sistemi inerziali sono biunivocamente determinati dai vettori unitari del cono temporale futuro $\mathcal{I}_x^+$ per un arbitrario punto x.

Proposizione 3.5. *Si consideri la classe dei sistemi inerziali $\mathfrak{S}$ in $\mathbb{M}^4$.*
(1) *I sistemi di riferimento inerziali $\mathscr{F} \in \mathfrak{S}$ determinano, tramite i vettori temporali associati $\partial_{\mathscr{F}}$, un'unica orientazione temporale di $\mathbb{M}^4$ indicata con $\mathcal{T}\uparrow$.*
(2) *Fissato $x \in \mathbb{M}^4$ e considerato $\mathcal{I}_x^+ = \mathcal{T}\uparrow(x)$, l'applicazione che assegna ad ogni riferimento inerziale $\mathscr{F} \in \mathfrak{S}$ il corrispondente vettore $\partial_{\mathscr{F}x} \in \mathcal{I}_x^+$ è un'applicazione iniettiva e suriettiva.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. (1) È sufficiente provare che se $\mathscr{F}, \mathscr{F}' \in \mathfrak{S}$ allora $\boldsymbol{\eta}(\partial_{\mathscr{F}}|\partial_{\mathscr{F}'}) < 0$. Infatti, scelto un sistema di coordinate minkowskiane in ciascuno dei due riferimenti, rispettivamente x^0, x^1, x^2, x^3 e x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 , $\partial_{\mathscr{F}}$ e $\partial_{\mathscr{F}'}$ coincidono per definizione con $\partial_0 := \partial/\partial x^0$ e $\partial'_0 := \partial/\partial x'^0$ rispettivamente. Avremo anche, se $\partial_i := \partial/\partial x^i$,

$$\partial_0 = \Lambda^i{}_0 \partial'_i \,,$$

da cui

$$\boldsymbol{\eta}(\partial_{\mathscr{F}}|\partial_{\mathscr{F}'}) = \Lambda^i{}_0 \boldsymbol{\eta}(\partial'_i|\partial'_0) = \Lambda^i{}_0\, \eta_{i0} = -\Lambda^0{}_0 < 0 \,,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\Lambda \in O(1,3)\uparrow$.
(2) Il fatto che l'applicazione sia iniettiva ha la seguente ragione. Se $\partial_0 = \partial'_0$ allora deve essere $\Lambda^i{}_0 = \delta^i_0$. Imponendo la condizione di Lorentz $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$, si vede immediatamente che deve anche essere $\Lambda^0{}_i = \delta^0_i$. Quindi re imponendo la condizione di Lorentz sulla matrice risultante si trova che Λ deve avere la forma Ω_R dell'esempio 2.1.1 in cui $R \in O(3)$. Per definizione di sistema di riferimento inerziale deve allora essere $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$. Passiamo alla suriettività. Se $v \in \{u \in \mathcal{I}_x^+ \mid \boldsymbol{\eta}(u|u) = -1\}$ poniamo $e_0 := v$ e completiamolo a base pseudo ortonormale di $T_x\mathbb{M}^4$ aggiungendo tre vettori e_α di tipo spazio ortonormalizzati e normali a e_0. La base ottenuta genera un sistema di coordinate cartesiane pseudo ortonormali connesso ad un qualsiasi sistema di coordinate minkowskiane da una matrice in $O(1,3)\uparrow$: infatti il vettore temporale $\partial_{\mathscr{F}}$ in x di un sistema inerziale associato ad ogni altro sistema di coordinate minkowskiane è in $\mathcal{I}_x^+$ come visto sopra per cui, per definizione di $\mathcal{I}_x^+$, $\boldsymbol{\eta}(e_0|\partial_{\mathscr{F}}) < 0$. Come visto sopra questo fatto equivale a dire che la matrice di Lorentz relativa ai due sistemi di coordinate minkowskiane

soddisfa $\Lambda^0{}_0 > 0$ per cui è in $O(1,3)\!\uparrow$. Di conseguenza le coordinate cartesiane associate a e_0, e_1, e_2, e_3 definiscono un sistema di coordinate minkowskiane ed un riferimento inerziale $\mathscr{F}_v$ tale che $\partial_{\mathscr{F}_v} = e_0 = v$. $\Box$

Nota 3.8. D'ora in poi assumeremo sempre su $\mathbb{M}^4$ l'orientazione temporale $\mathcal{T}\!\uparrow$ indotta dalla classe dei riferimenti inerziali.

Vale infine la seguente proposizione. La dimostrazione è immediata se si tiene conto che se $v = v^i e_i$, rispetto ad una base pseudo ortonormale e_0, e_1, e_2, e_3 con $\boldsymbol{\eta}(e_0|e_0) = -1$, la condizione $\boldsymbol{\eta}(e_0|v) < 0$ equivale a dire $v^0 > 0$.

Proposizione 3.6. *Considerando un sistema di coordinate minkowskiane associate and un riferimento inerziale, in componenti rispetto alla base associata in $T_x\mathbb{M}^4$ risulta:*

$$\mathcal{I}^+_x = \left\{ (v^0, v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (v^0)^2 > \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 \;,\;\; v^0 > 0 \right\}$$

e

$$\mathcal{I}^-_x = \left\{ (v^0, v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (v^0)^2 > \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 \;,\;\; v^0 < 0 \right\}$$

e ancora

$$\mathcal{J}^+_x = \left\{ (v^0, v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (v^0)^2 \geq \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 \;,\;\; v^0 \geq 0 \right\}$$

e

$$\mathcal{J}^-_x = \left\{ (v^0, v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (v^0)^2 \geq \sum_{\alpha=1}^{3} (v^\alpha)^2 \;,\;\; v^0 \leq 0 \right\} .$$

$\diamondsuit$

Commenti 3.2.
(1) Si noti che $\mathcal{J}^+_x \cap \mathcal{J}^-_x = \{0\}$.
(2) Ovviamente $I^+_x \cap I^-_x = \emptyset$ mentre $J^+_x \cap J^-_x = \{x\}$.

Esercizi 3.1.

1. Provare che $q \in I^+_p$ se e solo se $p \in I^-_q$. Generalizzare il risultato a $q \in J^+_p$ se e solo se $p \in J^-_q$.

Soluzione. Si fissi un sistema di coordinate minkowskiane. In tali coordinate $q \in I^+_p$ significa che la componente temporale del vettore di tipo tempo $\overrightarrow{pq}$ è positiva. Questo è equivalente a dire che la componente temporale del vettore di tipo tempo $\overrightarrow{qp}$ è negativa e questo equivale a $p \in I^-_q$. Nel secondo caso la dimostrazione procede nello stesso modo escluso il caso $p = q$ che è ovvio.

2. Provare che se $p \in I^+_q$ e $q \in I^+_r$ allora $p \in I^+_r$.

3. Rinforzare il risultato di sopra provando che se $p \in I_q^+$ e $q \in J_r^+$ oppure $p \in J_q^+$ e $q \in I_r^+$, allora $p \in I_r^+$.

3.3.2 Relatività ed assolutezza dell'ordinamento temporale e la struttura causale di $\mathbb{M}^4$.

Consideriamo due eventi p e q. Supponiamo che in q accada qualcosa e che in p ci sia una corrispondente (con-)causa. Ci chiediamo se la struttura geometrica della relatività ed il suo significato fisico suggeriscano qualche relazione geometrica tra p e q. I risultati che otterremo contengono una spiegazione evidente della terminologia utilizzata per classificare i vettori dello spazio di Minkowski e dei nomi che abbiamo dato agli insiemi $J_p^\pm$.
L'idea comune a tutte le interpretazioni fisiche del concetto di causalità è che, condizione *necessaria* perché ciò che accada in p sia causa di ciò che accade in q, è che *p preceda temporalmente q*. In relatività, la contemporaneità tra eventi è relativa al sistema di riferimento come visto nell'esempio 2.1.2 e potrebbe accadere che anche l'ordinamento temporale sia similmente relativo al riferimento, rendendo in tal modo impossibile una buona nozione di causalità. Rinunciare all'assolutezza dell'ordinamento temporale delle relazioni causali comporterebbe una complicazione forse insuperabile nella formulazione delle leggi fisiche. Vale il seguente importante risultato.

Proposizione 3.7. *Si considerino $p, q \in \mathbb{M}^4$.*
(1) *Se $q \in J_p^+ \cup J_p^-$ e se la coordinata temporale di q è rispettivamente strettamente maggiore di quella di p, uguale a quella di p, oppure strettamente minore di quella di p in un sistema di riferimento inerziale, tale relazione vale in ogni altro sistema di riferimento inerziale.*
(2) *Se $q \notin J_p^+ \cup J_p^-$, allora ci sono sempre tre sistemi di riferimento inerziali $\mathscr{F}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$ con funzioni coordinata temporale rispettivamente $x^0_{(\alpha)}$, tali che:*
(i) $x^0_{(1)}(p) > x^0_{(1)}(q)$,
(ii) $x^0_{(2)}(p) = x^0_{(2)}(q)$,
(iii) $x^0_{(3)}(p) < x^0_{(3)}(q)$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. In questa dimostrazione il vettore $\overrightarrow{pq}$ sarà sempre pensato come vettore in $T_p\mathbb{M}^4$ (vedi Appendice A).
(1) Occupiamoci del caso in cui la coordinata temporale di q è strettamente maggiore di quella di p. Usando un sistema di coordinate minkowskiano e la proposizione 3.6 si vede subito che deve essere $\overrightarrow{pq} \in \mathfrak{J}_p^+ \setminus \{0\}$. Tale fatto non dipende dalle coordinate scelte e tanto meno dal riferimento inerziale. Quindi usando ancora la proposizione 3.6, ma scegliendo un altro riferimento inerziale segue subito che la la coordinata temporale di q è strettamente maggiore di quella di p. Nel caso in cui la coordinata temporale di q è strettamente minore di quella di p si procede analogamente riducendosi a lavorare in $\mathfrak{J}_p^- \setminus \{0\}$. Infine, se le due coordinate coincidono, deve necessariamente essere $q \in J_p^+ \cap J_p^-$ ossia $q = p$ e la prova della tesi è ovvia.
(2) Se $q \notin J_p^+ \cup J_p^-$, il vettore $\overrightarrow{pq} \neq 0$ deve essere di tipo spazio. Definiamo il versore $e_3 := \overrightarrow{pq}/\sqrt{\boldsymbol{\eta}(\overrightarrow{pq}|\overrightarrow{pq})}$ e completiamo tale versore a base pseudo ortonormale in $T_p\mathbb{M}^4$, e_0, e_1, e_2, e_3,

dove e_0 è di tipo tempo ed appartiene a $\mathcal{I}_p^+$ e gli altri versori sono di tipo spazio. Il sistema di coordinate minkowskiane x^0, x^1, x^2, x^3 con origine in p associato a tale base definisce un riferimento inerziale per il punto (2) della proposizione 3.5. Nelle coordinate minkowskiane definite, $x^0(p) = x^0(q) = 0$ per costruzione. Consideriamo ora una trasformazione in $O(1,3)$ data da una matrice speciale di Lorentz definita nell'esempio 2.1.2. Dato che $\gamma > 0$, tale matrice appartiene a $O(1,3)\!\uparrow$ per cui è una trasformazione di coordinate minkowskiane tra riferimenti inerziali. È immediato provare che, nelle nuove coordinate minkowskiane x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 connesse alle x^0, x^1, x^2, x^3 tramite la matrice speciale di Lorentz detta, $x^0(q) < x'^0(q)$ se $v > 0$ e $x^0(q) > x'^0(q)$ se $v < 0$ dove $v \in (-c, c)$ è il parametro definito nell'esempio 2.1.2. $\Box$

La proposizione appena dimostrata suggerisce (ma la questione è più sottile, come vedremo nel prossimo paragrafo) che abbia senso dire che quello che accade nell'evento p possa essere causa di quello che accade nell'evento q solo se $q \in J_p^+$. Questo se si richiede che la causa preceda temporalmente l'effetto *in ogni sistema di riferimento*.
È facile provare che $q \notin J_p^+ \cup J_p^-$ è equivalente a $p \notin J_q^+ \cup J_q^-$. Similmente $q \in J_p^+ \cup J_p^-$ equivale a $p \in J_q^+ \cup J_q^-$. Infine $q \in I_p^+ \cup I_p^-$ è equivalente a $p \in I_q^+ \cup I_q^-$ ed è conseguenza di $q \in J_p^+ \cup J_p^-$.
Possiamo dare la seguente definizione che sintetizza il significato fisico delle relazioni causali tra eventi in termini geometrici.

Definizione 3.10. Siano $p, q \in \mathbb{M}^4$.
(a) p e q di dicono **temporalmente connessi** se $q \in I_p^+ \cup I_p^-$ (o equivalentemente $p \in I_q^+ \cup I_q^-$).
(b) p e q di dicono **causalmente connessi** se $q \in J_p^+ \cup J_p^-$ (o equivalentemente $p \in J_q^+ \cup J_q^-$).
(c) p e q di dicono **causalmente separati** o **causalmente sconnessi** o **spazialmente separati** se non sono causalmente connessi. $\Diamond$

Le definizioni tra le relazioni di coppie di eventi enunciate sopra corrispondono a quella che si chiama **struttura causale** dello spaziotempo.

3.3.3 Struttura causale e convenzionalità della procedura di sincronizzazione einsteiniana.

Un punto importante da non dimenticare nella discussione precedente è comunque la *convenzionalità* insita nel processo di sincronizzazione einsteiniano (cfr le osservazioni dopo l'enunciato del principio **RS1** ed il capitolo 8). La nozione di coordinata temporale globale di un sistema di riferimento inerziale è basata profondamente su tale procedura di sincronizzazione. A causa di tale convenzionalità, ci si deve chiedere quanto la relatività dell'ordinamento temporale tra eventi spazialmente separati (nel senso della definizione 3.10), dimostrata nella proposizione 3.7, sia basata sulla scelta iniziale della procedura di sincronizzazione einsteiniana. Il divieto di relazioni causali tra eventi spazialmente separati potrebbe non avere alcun significato fisico, se la relatività dell'ordinamento temporale tra eventi spazialmente separati non risultasse esistere in una differente formalizzazione che non adottasse il criterio di sincronizzazione einsteiniano, ma un altro che fosse ancora fisicamente ammissibile nel senso chiarito discutendo l'enunciato

del principio **RS1** (ed in particolare che sia in accordo con l'evidenza fisica che la velocità della luce su percorsi chiusi risulti essere costante). Dimenticandoci della relatività dell'ordinamento temporale tra eventi spazialmente separati, discutiamo allora la possibilità di legami causali tra eventi spazialmente separati, alla luce del *principio di relatività*, dato che questo è un altro ingrediente fondamentale della costruzione. Consideriamo un generico evento $p \in \mathbb{M}^4$. Ammettiamo possibile che ciò che accade in p possa essere causa di qualcosa che accade in un altro evento q, *anche nel caso in cui q sia spazialmente separato da p.* In tale situazione, per la proposizione 3.7, ci sarà un riferimento $\mathscr{F}$ in cui q è nel passato di p. Per l'equivalenza tra i sistemi di riferimento inerziali, sancita dal principio di relatività **RS3**, dobbiamo concludere che p può essere causa di un evento q, causalmente separato da p, giacente nel passato di p in *ogni fissato* riferimento inerziale $\mathscr{F}$. In altre parole, *se si ammette la possibilità di relazioni causa effetto tra eventi spazialmente separati, in un fissato riferimento inerziale queste devono potersi ammettere sia verso il futuro che verso il passato, a causa del principio di relatività.*
Questo risultato apparentemente paradossale (relazione di causa effetto dal futuro al passato) non è ancora veramente conclusivo, dato che dobbiamo nuovamente ricordare che la definizione di tempo globale di un riferimento si basa sulla procedura di sincronizzazione di Einstein che è parzialmente convenzionale. Per arrivare ad una conseguenza fisicamente inaccettabile, applichiamo il risultato ad una particella materiale che descrive una storia $\gamma : (a, b) \to \mathbb{M}^4$ nello spaziotempo, supposta descritta da un parametro che cresce verso il futuro. Sia $p = \gamma(t_p)$ e $q = \gamma(t_q)$ con $t_p > t_q$. Attraverso, eventualmente, un terzo evento q' è sempre possibile fare in modo che p sia spazialmente separato da q' e q' sia spazialmente separato da q. Più in generale si vede facilmente che ogni coppia di eventi dello spaziotempo può essere congiunta da una spezzata di segmenti con vettore tangente di tipo spazio. Se, ammettiamo la possibilità di relazione causali tra eventi spazialmente separati, possiamo quindi causare qualcosa nel passato *riferito all'ordinamento della curva* di p, precisamente nell'evento q, agendo in p tramite una catena di eventi spazialmente separati. Questo produce i ben noti paradossi causali della fantascienza (posso ora provocare un evento nel mio passato personale per impedire qualcosa che è mi già accaduto). Si osservi che il risultato finale, essendo riferito a due eventi lungo la storia di un'unica particella, prescinde completamente da ogni scelta convenzionale di una procedura di sincronizzazione, di Einstein o differente. Questa discussione porta a concludere che, in virtù del principio di relatività ed indipendentemente dalla natura convenzionale del processo di sincronizzazione einsteiniano, *non può esserci una relazione di causa effetto tra due eventi p e q se tali eventi sono* spazialmente separati *nel senso della definizione 3.10.*

Esercizi 3.2.

1. Mostrare che in Relatività non ha più senso fisico la nozione di *corpo rigido*.

Suggerimento: Possiamo considerare un telegrafo costituito da un'asta rigida lunghissima: muovendo un estremo l'altro estremo istantaneamente (per il vincolo di rigidità) si muoverebbe anch'esso.

3.3.4 Linee di universo come curve di tipo causale.

Il risultato ottenuto dalla precedente discussione comporta anche alcuni vincoli alla definizione di linea di universo come storia di un punto materiale nello spaziotempo. L'idea assunta dalla relatività e connessa all'idea di *località* (nel senso di negazione dell' esistenza di "azione a distanza") è che quando ciò che accade in q è causato da qualcosa che accade in p, qualche segnale fisico *si propaghi* da p a q lungo una linea di universo veicolata da un sistema fisico intermediario. Non solo, ma attraverso le linee di universo di punti materiali che connettono p a q, si possano sempre stabilire relazioni di causa-effetto. Ne consegue che le linee di universo di punti materiali possono connettere *solo* eventi causalmente connessi. Vediamo di riscrivere tale restrizione in termini matematici più facili da maneggiare.

Proposizione 3.8. *Si consideri una curva differenziabile $\rho : (a,b) \to \mathbb{M}^4$ non singolare, ossia $\dot\rho(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a,b)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\rho(t') \in J^+_{\rho(t)} \setminus \{\rho(t)\}$ per ogni $t, t' \in (a,b)$ con $t < t'$ è che $\dot\rho(u) \in \mathfrak{J}^+_{\rho(u)}$ per ogni $u \in (a,b)$.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. Se $\rho(t') \in J^+_{\rho(t)} \setminus \{\rho(t)\}$ per ogni $t' > t$, allora pensando $\overrightarrow{\rho(t)\rho(t')}$ come applicato in $\rho(t)$, deve essere $\overrightarrow{\rho(t)\rho(t')}/(t-t') \in \mathfrak{J}^+_{\rho(t)}$ per ogni $t' > t$. Dato che $\mathfrak{J}^+_{\rho(t)}$ è chiuso sarà anche

$$\dot\rho(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\overrightarrow{\rho(t)\rho(t')}}{t - t'} \in \mathfrak{J}^+_{\rho(t)} \,,$$

ciò prova metà della tesi.
Supponiamo viceversa che $0 \neq \dot\rho(u) \in \mathfrak{J}^+_{\rho(u)}$ per ogni $u \in (a,b)$ e assumiamo, per assurdo, che ci siano due punti $\rho(u)$ e $\rho(u')$, $u < u'$ sulla curva tali che: $\rho(u') \notin J^+_{\rho(u)} \setminus \{\rho(u)\}$, cioé $\rho(u) - \rho(u')$ *non* sia di tipo causale futuro. Ci sono allora tre casi possibili.
(1) I due punti $\rho(u)$ e $\rho(u')$, con $u < u'$, sono causalmente separati. Se ciò fosse sarebbe $\rho(u') - \rho(u) \neq 0$ di tipo spazio. Definiamo e_1 come il versore, normalizzato a 1 ed applicato in $\rho(u)$ ottenuto dalla normalizzazione di $\rho(u') - \rho(u)$. Completiamo e_1 a base pseudo ortonormale e_0, e_1, e_2, e_3 con e_0 di tipo tempo in $\mathfrak{I}^+_{\rho(u)}$ e i rimanenti versori di tipo spazio. Definiamo coordinate minkowskiane centrate in $\rho(u)$ e generate dalla base detta. In tali coordinate, per costruzione $x^0(\rho(u')) = x^0(\rho(u))$ per cui ci sarà un punto $u_0 \in (u, u')$ in cui $dx^0/du|_{u_0} = 0$. In tale punto si ha

$$\boldsymbol{\eta}(\dot\rho(u_0)|\dot\rho(u_0)) = -\left(\frac{dx^0}{du}|_{u_0}\right)^2 + \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{dx^\alpha}{du}|_{u_0}\right)^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{dx^\alpha}{du}|_{u_0}\right)^2 \geq 0$$

D'altra parte per ipotesi $\dot\rho(u_0) \in \mathfrak{J}^+_{\rho(u_0)}$ per cui, in particolare, $\boldsymbol{\eta}(\dot\rho(u_0)|\dot\rho(u_0)) \leq 0$. Usando tale risultato sopra abbiamo che deve essere contemporaneamente

$$\frac{dx^0}{du}|_{u_0} = 0 \,,$$

ma anche
$$\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{dx^\alpha}{du}|_{u_0}\right)^2 = 0\,,$$
ossia $\dot\rho(u_0) = 0$. Questo è impossibile per ipotesi.
(2) I due punti $\rho(u)$ e $\rho(u')$, con $u < u'$, sono tali che $\rho(u') - \rho(u)$ è di tipo causale passato. Scegliamo un sistema di coordinate minkowskiane associate ad un riferimento inerziale $\mathscr{F}$ con asse temporale diretto verso il futuro. In queste coordinate, se la curva ρ è parametrizzata come $x^i = x^i(u)$, deve essere $x^0(u') < x^0(u)$. Pertanto deve esistere $u_0 \in (u, u')$ con $dx^0/du|_{u_0} = (x^0(u') - x^0(u))/(u' - u) < 0$. Pertanto, in $\rho(u_0)$, il vettore tangente a ρ, che è di tipo causale (cioé tempo o luce) per ipotesi, *non* può essere diretto verso il futuro. Questo è assurdo.
(3) I due punti $\rho(u)$ e $\rho(u')$, con $u < u'$, sono tali che $\rho(u') = \rho(u)$. Scegliamo un sistema di coordinate minkowskiane associate ad un riferimento inerziale $\mathscr{F}$ con asse temporale diretto verso il futuro. In queste coordinate, se la curva ρ è parametrizzata come $x^i = x^i(u)$, deve essere $x^0(u') = x^0(u)$. Pertanto deve esistere $u_0 \in (u, u')$ con $dx^0/du|_{u_0} = (x^0(u')-x^0(u))/(u'-u) = 0$. Pertanto, in $\rho(u_0)$, il vettore tangente a ρ, non può essere di tipo causale (cioé tempo o luce). Questo è assurdo. $\Box$

D'ora in poi assumeremo che i punti materiali abbiano evoluzione in $\mathbb{M}^4$ descritta da *linee di universo* cioè curve con vettore tangente mai nullo, di tipo causale ed orientato positivamente nel tempo. Diamo a tal fine le seguente definizioni nel caso di una varietà lorentziana quadridimensionale generica $(M, \mathbf{g})$.

Definizione 3.11. Sia $(M, \mathbf{g})$ una varietà quadridimensionale lorentziana connessa e temporalmente orientata (in particolare $M = \mathbb{M}^4$). Se $\rho : I \to M$ è una curva C^∞ *non singolare* (cioé con vettore tangente mai nullo) dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, essa è detta:
(a) di tipo tempo e futuro orientata, se $\dot\rho(u) \in \mathcal{I}^+_{\rho(u)}$ per ogni $u \in I$,
(b) di tipo causale e futuro orientata, se $\dot\rho(u) \in \mathcal{J}^+_{\rho(u)}$ per ogni $u \in I$,
(c) di tipo spazio, se $\dot\rho$ è ovunque di tipo spazio.
Le curve C^∞ non singolari di tipo causale e futuro orientate sono dette **linee di universo** o, equivalentemente, **curve di universo** $\diamondsuit$

Nota 3.9. Se riparametrizziamo una linea di universo $\rho = \rho(u)$ con un nuovo parametro funzione C^∞ di u, $z = z(u)$ tale che $dz/du > 0$, la nuova funzione $\rho = \rho(u(z))$ descrive ancora una linea di universo e non altera, punto per punto, la natura del vettore tangente che rimane di tipo tempo futuro o luce futuro a seconda del caso. Vedremo tra poco che nel caso in cui il vettore tangente sia di tipo tempo (futuro), c'è una parametrizzazione naturale particolare con significato fisico.

3.4 Ancora sulla struttura causale: determinismo, località, paradosso EPR.

In questa parte cercheremo di precisare ulteriormente, in termini fisici, la nozione di *determinismo* insieme alla nozione di *località*. Vedremo anche come le teorie quantistiche diano luogo a fenomeni che apparentemente violano la struttura causale dello spaziotempo, ma che in realtà non lo fanno.

Per cominciare, ricordiamo che in Relatività Speciale, se due eventi p e q *non* sono causalmente connessi, cioè sono spazialmente separati, allora esistono sempre due sistemi di coordinate globali riferite a due osservatori (inerziali) legati da una trasformazione di Poincaré del sottogruppo ortocrono, che giudicano, rispetto alla propria coordinata temporale, rispettivamente, p precedere q oppure q precedere p. Quindi, nel caso in esame, l'ordine temporale tra p e q non è definibile in modo assoluto e ogni relazione causale tra eventi in p e q sarebbe impossibile come notato precedentemente. Precisiamo la nozione di *causa* ed *effetto* come segue.
Dato un evento e ed una classe di eventi $\mathcal{G}$ che non *contiene e, diremo che una classe di fenomeni fisici $\{G_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ che avvengono negli eventi corrispondenti agli indici $g \in \mathcal{G}$ è* **causa** *del fenomeno fisico E_e che avviene in e, o equivalentemente, E_e è* **effetto** *di $\{G_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ se e solo se valgono le seguenti due condizioni:*
(1) $e \in \cup_{g\in\mathcal{G}} J_g^+$,
(2) *ogni qual volta avvengono i fenomeni $\{G_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ allora avviene il fenomeno E_e.*

Nota 3.10. I fenomeni fisici di cui si parla sopra devono essere descritti nel linguaggio della relatività speciale (cioé in termini di tensori). La locuzione "*ogni qual volta*" deve quindi essere interpretata come segue. Accanto all'evento e ed alla classe di eventi $\mathcal{G}$, dobbiamo immaginare di poter considerare altri eventi e' e altre classi di eventi $\mathcal{G}'$ ottenuti dai precedenti tramite un operazione di isometria spaziotemporale, cioè una trasformazione $\mathscr{P}$ del gruppo di Poincaré ortocrono proprio, interpretata in senso attivo (cioé che "sposta" i punti della varietà). Tale trasformazione individua fenomeni fisici che avvengono in e' e $\mathcal{G}'$, $E'_{e'}$ e $\{G'_g\}_{g\in\mathcal{G}'}$ rispettivamente, ottenuti da E_e e $\{G_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ sotto l'azione di $\mathscr{P}$. La locuzione "*ogni qual volta*" è proprio riferita alla scelta arbitraria della trasformazione $\mathscr{P}$ del gruppo di Poincaré. In questo senso la condizione (2) si deve interpretare come:
per ogni scelta di $\mathscr{P}$, in e' avviene $E'_{e'}$, se $\{G'_g\}_{g\in\mathcal{G}'}$ avvengono in $\mathcal{G}'$.
Nel seguito la locuzione "*ogni qual volta*" deve essere interpretata come indicato sopra.
Si osservi infine che $e \in \cup_{g\in\mathcal{G}} J_g^+$ implica $e' \in \cup_{g\in\mathcal{G}'} J_g^+$ per ogni scelta di $\mathscr{P}$ nel gruppo ortocrono di Poincaré, per cui la condizione (1) ha senso in tale interpretazione.

La definizione data di *causa* e di *effetto* esprime in termini fisici più precisi la nozione di **causalità** relativistica. Usando tali nozioni, il **principio del determinismo** in fisica relativistica può allora essere enunciato nella sua forma più debole possibile come:
ogni fenomeno fisico Q_q che avviene in un evento q ha una causa nell'insieme di fenomeni fisici

che avvengono negli eventi $p \in J_q^- \setminus \{q\}$.

Questo significa in particolare che esistono *leggi fisiche* che permettono di determinare (prevedere) tutti i fenomeni fisici che avvengono in q conoscendo corrispondenti fenomeni fisici che avvengono nei punti $p \in J_q^- \setminus \{q\}$.
Si può enunciare il principio del determinismo in forme molto più forti assumendo che i fenomeni fisici in q siano completamente determinati assegnando fenomeni fisici che avvengono in sottoinsiemi propri opportuni di $J_q^- \setminus \{q\}$ (porzioni di sottovarietà tridimensionali di tipo spazio che intersecano l'insieme detto, per esempio).

Dati due eventi p e q, due fenomeni fisici P_p e Q_q che avvengono nei rispettivi eventi si dicono **correlati** se e solo se:
ogni qual volta avviene uno dei due allora avviene anche l'altro.

Il **principio di località** può essere enunciato nella sua forma più debole nel modo seguente:
dati due eventi p e q, e considerati due fenomeni fisici F_p ed F_q che avvengono nei due eventi rispettivamente, se F_p ed F_q sono correlati e non hanno una causa comune (in $(J_p^- \cap J_q^-)\setminus\{p,q\}$) allora uno dei due fenomeni è (parte di una) causa dell'altro ed in particolare p e q sono causalmente connessi.

I principi di determinismo e località sono violati da alcuni fenomeni quantistici. Per quanto riguarda il determinismo, secondo la meccanica quantistica esso è violato dal *processo di misura quantistico*: il risultato della misura in un evento q di qualche propietà di un sistema quantistico non è prevedibile anche conoscendo tutto ciò che accade in $J_q^- \setminus \{q\}$. In altre parole, quando misuriamo una proprietà di un sistema quantistico con un certo strumento in un certo posto ed ad un certo tempo il fenomeno, "l'indice dello strumento segna tale valore" non ha (in generale) una *causa* nel senso preciso detto sopra.
La violazione del principio di località è una questione molto più delicata ed è connessa con il cosiddetto "paradosso Einstein-Podolsky-Rosen" (EPR) [16]. Tale "paradosso" fu elaborato, in un celebre articolo, dagli autori citati sopra per provare che la meccanica quantistica non poteva considerarsi una teoria completa ai fini della descrizione del mondo fisico nella formulazione standard detta "di Copenhagen". La procedura degli autori fu la seguente. In primo luogo essi provarono che la meccanica quantistica prevede l'esistenza di alcuni fenomeni fisici particolari. In secondo luogo essi mostrarono che tali fenomeni fisici sono in contrasto con ipotesi fisiche che, a giudizio di Einstein, Podolsky e Rosen, sarebbero dovute essere più fondamentali della stessa meccanica quantistica. Una di queste ipotesi era proprio il principio di località. Quindi, in caso di evidenza sperimentale dei fenomeni quantistici evidenziati da Einstein, Podolsky e Rosen una delle ipotesi fondamentali, tra cui la località, avrebbe dovuto essere violata. Senza entrare nei dettagli dell'analisi EPR diremo solo che la formulazione standard della meccanica quantistica afferma che esistono coppie di fenomeni fisici "macroscopici" *correlati* – dati da risultati di misurazioni su sistemi "microscopici" di alcune grandezze fisiche – che avvengono in coppie di eventi "lontani", anche nel caso in cui tali eventi non siano *causalmente connessi* e i

corrispondenti fenomeni non hanno una *causa* (nel senso preciso detto sopra) e quindi nemmeno una causa comune.
Secondo EPR le correlazioni suddette, se osservate avrebbero dovuto sussistere per una causa comune (cioé a causa di uno stato di cose preesistente alle misurazioni). Non potendo, tale causa comune essere descritta con le variabili della Meccanica Quantistica per principio, l'esistenza delle correlazioni avrebbe implicato l'incompletezza della descrizione della realtà data dalla Meccanica Quantistica.
Quando EPR presentarono il loro celebre lavoro, la tecnologia non era in grado di testare sperimentalmente la presenza o l'assenza dei fenomeni quantistici di cui sopra, per cui la discussione rimase ad un livello puramente teorico e per molti versi ideologico. Una rielaborazione del "paradosso EPR" fu proposta da John Bell all'inizio degli anni 1960 in termini di *spin* o di coppie di particelle. In un geniale articolo del 1963, Bell dimostrò che, con una scelta opportuna delle grandezze da misurare che devono essere più di due (nella realtà si misurano le tre componenti dello spin di particelle massive o stati di polarizzazione di fotoni) che darebbero luogo alle correlazioni suddette, è possibile *distinguere sperimentalmente* tra le due situazioni in cui i valori delle grandezze: (i) sono fissate *prima* delle misure, oppure (ii) vengono fissate *al momento* delle misure. Bell dimostrò che, in presenza delle correlazioni, la situazione (i) vale solo se sono verificate una serie di disuguaglianze tra gli esiti delle misure: le famose *disuguaglianze di Bell.*
È importante precisare che le disuguaglianze di Bell valgono indipendentemente dal fatto che si assuma come vera o falsa la formulazione standard della Meccanica Quantistica. A partire dal 1972 sono stati fatti diversi esperimenti (in particolare l'esperimento decisivo è stato fatto nel 1982 da A. Aspect, J. Dalibard e G. Roger [18]) per testare l'esistenza delle correlazioni suddette insieme alla validità o alla violazione delle disuguaglianze di Bell. Gli esperimenti hanno dimostrato, nell'ambito degli errori sperimentali, che (a) le correlazioni *esistono*, (b) le disuguaglianze di Bell sono *violate.*
Quindi, se si accettano gli esiti degli esperimenti suddetti, indipendentemente dall'accettare o meno la formulazione standard della Meccanica Quantistica, si deve concludere che le correlazioni previste dalla Meccanica Quantistica esistono e gli esiti delle misure sono fissati al momento delle misurazioni. Quindi la località sembrerebbe essere violata dai fenomeni sperimentali. Malgrado la situazione sembri molto intricata, la rinuncia al principio di località per i fenomeni quantistici EPR non distrugge la formulazione causale della relatività. Si può provare rigorosamente che, se si assume il formalismo della Meccanica Quantistica [18], proprio per la contemporanea violazione del principio di determinismo e del principio di località, non è possibile trasmettere "informazione utile" da un evento all'altro per mezzo di correlazioni di tipo EPR tra coppie di eventi spazialmente separati[3]. In altre parole, se p e q sono eventi spazialmente separati, non è possibile fare avvenire qualcosa in q facendo deliberatamente avvenire qualche fenomeno in p. Se invece ciò fosse possibile ci troveremmo a dover applicare la nozione di "causa-effetto" ad una coppia di fenomeni che avvengono in eventi spazialmente separati per i quali quindi l'ordine temporale non è assoluto. Ciò contrasterebbe con la richiesta irrinunciabile dell'ordinamento

[3]In questo senso, come si dice nel linguaggio dei fisici, "i fenomeni connessi al paradosso EPR non permettono la trasmissione di informazione a velocità superluminare".

temporale assoluto tra causa ed effetto e la struttura causale della Relatività Speciale sarebbe messa in discussione.

Capitolo 4

Cinematica in Relatività Speciale.

In questo capitolo studieremo gli sviluppi della fisica elementare della teoria della relatività speciale. In particolare vedremo alcuni fenomeni cinematici storicamente molto importanti, quali la dilatazione degli intervalli di tempo e la contrazione delle lunghezze. Richiamiamo la seguente definizione geometrica generale che sarà utile in tutto il seguito.

Definizione 4.1. Sia $(M, \mathbf{g})$ una varietà riemanniana o lorentziana e $\gamma : (a,b) \to M$ una curva di classe C^1 regolare (cioè con vettore tangente mai nullo). L'**ascissa curvilinea** della curva γ è il parametro s definito da:

$$s(u) := \int_c^u \sqrt{|\mathbf{g}(\dot\rho(v)|\dot\rho(v))|}\ dv\ .$$

dove è stato fissato $c \in (a,b)$.
$\diamondsuit$

Per costruzione s è il parametro che misura la lunghezza della curva, partendo dal punto $\rho(c)$ fissato su di essa, in riferimento alla metrica della varietà .

Nota 4.1. Si osservi che $ds/du > 0$ per costruzione per cui la funzione $u \mapsto s(u)$ è un diffeomorfismo strettamente crescente e, riparametrizzando la curva in s, il nuovo vettore tangente ∂_s è proporzionale al vecchio tramite un fattore positivo, appunto ds/du.

Nota 4.2. Dalla definizione di s applicando il primo teorema fondamentale del calcolo troviamo:

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{|\mathbf{g}(\dot\rho(v)|\dot\rho(v))|}\ ,$$

pertanto:

$$\mathbf{g}\left(\partial_s|\partial_s\right) = \mathbf{g}\left(\frac{du}{ds}\dot\rho\,\middle|\,\frac{du}{ds}\dot\rho\right) = \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \mathbf{g}(\dot\rho|\dot\rho) = \pm\left(\frac{du}{ds}\right)^2 |\mathbf{g}(\dot\rho|\dot\rho)| = \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \left[\pm\left(\frac{ds}{du}\right)^2\right] = \pm 1\ .$$

Dunque:

$$\mathbf{g}\,(\partial_s|\partial_s) = \pm 1\,. \tag{4.1}$$

Il segno, ovviamente, dipende dalla segnatura della metrica e dal tipo di curva che stiamo considerando.

4.1 Nozioni elementari: Tempo proprio e Quadrivelocità.

Ci occuperemo ora di alcuni importanti risultati validi in Relatività Speciale e concernenti alcuni fatti non banali di cinematica. Consideriamo una *linea di universo* $\rho : u \mapsto \rho(u) \in \mathbb{M}^4$ con $u \in (a,b)$ di *tipo tempo*, per cui

$$|\boldsymbol{\eta}(\dot\rho(v)|\dot\rho(v))| = -\boldsymbol{\eta}(\dot\rho(v)|\dot\rho(v)) > 0$$

e possiamo applicare la definizione 4.1, definendo l'ascissa curvilinea lorentziana:

$$s(u) := \int_c^u \sqrt{-\boldsymbol{\eta}(\dot\rho(v)|\dot\rho(v))}\;dv\,.$$

Come osservato sopra, riparametrizzando la curva in s, il nuovo vettore tangente ∂_s è proporzionale al vecchio tramite il fattore positivo ds/du. Ciò implica immediatamente che la curva riparametrizzata sia ancora una linea di universo. Infine notiamo in particolare che, nel caso particolare considerato, la (4.1) si riduce a:

$$\boldsymbol{\eta}\,(\partial_s|\partial_s) = -1\,.$$

Dato che per costruzione ∂_s è punto per punto in $\mathfrak{I}^+_{\rho(s)}$ usando la proposizione 3.5 possiamo associare un riferimento inerziale $\mathscr{F}_{\rho(s_0)}$ a $\partial_s|_{\rho(s_0)}$, *in generale uno diverso ad ogni evento* $\rho(u_0)$ *raggiunto dalla curva.* In tale riferimento le componenti spaziali di ∂_s e più in generale del vettore tangente a $u \mapsto \rho(u_0)$ saranno nulle. Se x^0, x^1, x^2, x^3 sono coordinate minkowskiane associate al riferimento suddetto in corrispondenza dell'evento $\rho(u_0)$ corrispondente al valore s_0 dell'ascissa curvilinea, la curva ρ sarà parametrizzata come $x^i = x^i(s)$ in modo tale che, per costruzione:

$$\frac{dx^i}{ds}|_{s_0} = \delta^i_0\,. \tag{4.2}$$

Di conseguenza, applicando la teoria dello sviluppo di Taylor per le variabili spaziali x^α, $\alpha = 1,2,3$ e per la variabile temporale x^0 avremo che:

$$x^\alpha(s) = x^\alpha(s_0) + (s-s_0)O^\alpha(s-s_0)\,, \tag{4.3}$$

mentre:

$$x^0(s) = x^0(s_0) + (s-s_0) + (s-s_0)O(s-s_0)\,, \tag{4.4}$$

dove le funzioni $O^i(a)$ sono infinitesime per $a \to 0$. La seconda equazione può essere riscritta come:

$$\Delta x^0 = \Delta s + \Delta s O(\Delta s)\,.$$

Se dividiamo i due membri per c e definiamo $\tau := s/c$ abbiamo l'identità

$$\Delta t = \Delta\tau + \Delta\tau O(\Delta\tau) . \tag{4.5}$$

dove $t := x^0/c$ è la coordinata temporale del riferimento. Vediamo allora che, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, nell'intorno di $\tau_0 = s_0/c$, gli intervalli di tempo valutati nel riferimento $\mathscr{F}_{\rho(s_0)}$ coincidono con quelli del parametro τ. In particolare, di conseguenza, se $t_0 := t(s_0)$, per $\alpha = 1, 2, 3$ avremo:

$$\left.\frac{dx^\alpha}{dt}\right|_{t_0} = \left.\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right|_{\tau_0} = \frac{1}{c}\left.\frac{dx^\alpha}{ds}\right|_{s_0} = 0 \,,$$

dove abbiamo usato (4.2) per valutare l'ultima derivata. Concludiamo che nel riferimento $\mathscr{F}_{\rho(s_0)}$ il punto materiale è *visto fermo all'istante* t_0 corrispondente al valore s_0 dell'ascissa curvilinea. Di conseguenza il riferimento inerziale $\mathscr{F}_{\rho(s_0)}$ si deve pensare come il riferimento inerziale di *quiete istantanea* nell'evento $\rho(s_0)$ con la particella descritta dalla linea di universo ρ. Ulteriormente (4.5) precisa che, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, gli intervalli di tempo valutati nel riferimento di quiete istantanea in $\rho(s_0)$, coincidono con gli intervalli del parametro $\tau = s/c$. Se assumiamo l'esistenza di orologi il cui valutare il tempo non è influenzato dalle forze che agiscono su di essi, la coordinata τ può essere interpretata come il tempo valutato da un orologio in quiete con il punto materiale. Per tale motivo la coordinata τ viene detta *tempo proprio* della linea di universo. Almeno per punti materiali costituiti da particelle atomiche o subatomiche, il postulato fisico di identificare il parametro τ con il tempo valutato in quiete con la particella indipendentemente dall'accelerazione della stessa, funziona decisamente bene (vedi per es. [19]). Tale postulato prende il nome di **postulato degli orologi**.
Il vettore tangente alla curva riparametrizzata in τ viene detto *quadrivelocità*. Diamo formalmente le definizioni presentate in modo informale.

Definizione 4.2. (**Tempo proprio, quadrivelocità e sistema di quiete istantanea.**) Si consideri una linea di universo $\rho : [a, b] \ni u \mapsto \rho(u) \in \mathbb{M}^4$ di tipo tempo. Si definisca il nuovo parametro:

$$s(u) := \int_a^u \sqrt{-\boldsymbol{\eta}(\dot\rho(v)|\dot\rho(v))}\; dv \,. \tag{4.6}$$

(a) Il parametro $\tau := s/c$ ridefinito eventualmente a meno di una costante additiva è detto **tempo proprio** di ρ.
(b) il vettore $V_\rho := \partial_\tau := c\partial_s$, che soddisfa $\boldsymbol{\eta}\,(\partial_\tau|\partial_\tau) = -c^2$ è detto **quadrivelocità** di ρ.
(c) Per un fissato valore di τ_0, il sistema di riferimento inerziale associato, secondo (2) di proposizione 2.3, al vettore ∂_s *tangente a* $s \mapsto \rho(u(s))$ *in* $\rho(u(c\tau_0))$ è detto **sistema inerziale di quiete istantanea** con ρ all'istante di tempo proprio τ_0. $\diamondsuit$

Commenti 4.1.
(1) Nel caso in cui la linea di universo non sia di tipo tempo non è più possibile interpretare

ovunque ∂_s come un vettore tangente alla coordinata temporale di un sistema di coordinate minkowskiane perché ∂_s può essere di tipo luce. Nei tratti in cui la curva diventa di tipo luce, il parametro s diventa singolare, nel senso che rimane costante al crescere del parametro inizialmente scelto per parametrizzare la curva.
(2) Non può accadere che una linea di universo $\rho = \rho(u)$ sia di tipo tempo *in un punto isolato* $\rho(u_0)$. Se il vettore tangente in $\rho(u_0)$ è di tipo tempo, la funzione continua (differenziabile) $u \mapsto \boldsymbol{\eta}(\dot\rho(u)|\dot\rho(u))$ è negativa in u_0 e quindi deve permanere tale in un intorno di u_0. Quindi se in $\rho(u_0)$ il vettore tangente è di tipo tempo, è possibile definire il tempo proprio in un intorno di u_0 ed ha quindi senso definire la quadrivelocità in $\rho(u_0)$.

Vogliamo ora arrivare alla nozione di *velocità* di un punto materiale, ossia di una linea di universo ρ di tipo tempo o causale, *rispetto ad un riferimento inerziale* $\mathscr{F}$. Alcune premesse sono necessarie.
Consideriamo un riferimento inerziale $\mathscr{F}$ ed un evento $p \in \mathbb{M}^4$. Sia $\Sigma_{\mathscr{F}p}$ l'unico spazio di quiete con $\mathscr{F}$ passante per p. Il fatto che $T_p\mathbb{M}^4$ ammetta una base dovuta a coordinate cartesiane solidali con $\mathscr{F}$, in cui quindi $e_0 = \partial_{\mathscr{F}p}$ e e_1, e_2, e_3 formano una base dello spazio tangente di $T_p\Sigma_{\mathscr{F}p}$, implica l'esistenza della decomposizione:

$$T_p\mathbb{M}^4 = L(\partial_{\mathscr{F}p}) \oplus T_p\Sigma_{\mathscr{F}p} \,.$$

$L(\partial_{\mathscr{F}p})$ è lo spazio lineare generato da $\partial_{\mathscr{F}p}$. In realtà la decomposizione di sopra è *diretta* (e per questo abbiamo usato il simbolo $\oplus$) cioè per ogni $v \in T_p\mathbb{M}^4$, la decomposizione $v = T_v + X_v$ dove $T_v \in L(\partial_{\mathscr{F}p})$ e $X_v \in T_p\Sigma_{\mathscr{F}p}$ è unica. Infatti, tenendo conto che $\partial_{\mathscr{F}p}$ è di tipo tempo e i vettori di $T_p\Sigma_{\mathscr{F}p}$ sono di tipo spazio, risulta immediatamente: $L(\partial_{\mathscr{F}p}) \cap T_p\Sigma_{\mathscr{F}p} = \{0\}$. E questo è equivalente alla unicità della decomposizione di ogni v detta sopra.

Consideriamo ora una linea di universo ρ di tipo tempo e parametrizzata in un parametro u. Fissiamo un riferimento inerziale $\mathscr{F}$. Se $p := \rho(\tau_0) \in \Sigma_{\mathscr{F}\tau_0}$ e passando alla parametrizzazione del tempo proprio, possiamo decomporre univocamente la quadrivelocità $V_\rho(\tau_0)$ come

$$V_\rho(\tau_0) = \overrightarrow{V}(\tau_0) + c\gamma(\tau_0)\partial_{\mathscr{F}p} \,,$$

dove $\overrightarrow{V}(\tau_0) \in T_p\Sigma_{\mathscr{F}p}$. Dato che $\boldsymbol{\eta}(\mathscr{F}_p|V_p) < 0$ deve essere $c\gamma(\tau) > 0$. Parametrizzando la curva ρ in coordinate minkowskiane x^0, x^1, x^2, x^3 associate a $\mathscr{F}$, $\gamma(\tau) > 0$ altro non è che $dx^0/d\tau$. È allora chiaro che il vettore di $T_p\Sigma_{\mathscr{F}p}$

$$v := \frac{\overrightarrow{V}}{\gamma} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{dx^\alpha}{d\tau}|_{\tau_0}\partial_{x^\alpha}}{\frac{dt}{d\tau}|_{\tau_0}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{dx^\alpha}{dt}|_{t(\tau_0)}\partial_{x^\alpha} \,.$$

ha il significato fisico di *velocità di* ρ rispetto a $\mathscr{F}$.
Se consideriamo una linea di universo di tipo causale, non ci sono problemi ad applicare la definizione data fino a quando il vettore tangente è di tipo tempo. Nei punti $\rho(u_0)$ (o nei tratti)

in cui il vettore tangente di una linea di universo è di tipo luce (ma si ricordi che non può mai essere nullo comunque per definizione di linea di universo) la quadrivelocità non è definita perché il parametro privilegiato dato dal tempo proprio diventa singolare. In ogni caso, il vettore tangente relativo alla parametrizzazione iniziale può essere decomposto univocamente come

$$\dot{\rho}(u_0) = \overrightarrow{U}(u_0) + c\delta(u_0)\partial_{\mathscr{F}p} ,$$

Proviamo a definire nel punto $\rho(u_0)$ la velocità:

$$v := \frac{\overrightarrow{U}}{\delta} .$$

Tale definizione può essere sensata se è invariante sotto riparametrizzazione (visto che non c'è una parametrizzazione con significato fisico particolare deve andare bene per tutte le parametrizzazioni!). Se cambiamo la parametrizzazione della curva $\rho' = \rho(u(z))$ dove $du/dz > 0$ per non alterare il senso di percorrenza della curva ovvero la direzione del tempo, il vettore $\dot{\rho}(z)$ sarà ancora di tipo luce diretto verso il futuro e $\dot{\rho'}(z) = \frac{du}{dz}\dot{\rho}(u)$, per cui il rapporti tra le componenti rimangono invariati e la velocità calcolata con la formula di sopra rispetto alla nuova parametrizzazione risulta essere la stessa ottenuta con la vecchia parametrizzazione. Si osservi che lo stesso discorso si può fare anche per curve di tipo tempo. In quel caso, la velocità definita in quel caso è banalmente invariante sotto riparametrizzazioni differenziabili che non alterano il verso di percorrenza della curva e le due definizioni coincidono. Da questo punto di vista la velocità definita nel caso di vettori tangenti di tipo luce è la naturale estensione della definizione data nel caso di vettori tangenti di tipo tempo. Possiamo quindi dare la seguente definizione riassuntiva.

Definizione 4.3. Sia $\rho : u \mapsto \rho(u)$ una linea di universo e $\mathscr{F}$ un sistema di riferimento inerziale. Se $p = \rho(u_p)$, la **velocità di ρ rispetto a $\mathscr{F}$** nell'evento p è il vettore di $T_p\Sigma_{\mathscr{F}p}$

$$v_{\rho p}|_{\mathscr{F}} := \frac{\overrightarrow{U}_{\rho p}}{\delta_{\rho p}} ,$$

dove $\Sigma_{\mathscr{F}p}$ è l'unico spazio di quiete di $\mathscr{F}$ passante per p e

$$\dot{\rho}(u_p) = c\delta_{\rho p}\partial_{\mathscr{F}p} + \overrightarrow{U}_{\rho p} \tag{4.7}$$

è la decomposizioni diretta del vettore tangente a ρ in p su $\partial_{\mathscr{F}p}$ e $T_p\Sigma_{\mathscr{F}p}$. $\diamondsuit$

Nota 4.3. Vogliamo sottolineare la profonda differenza tra i concetti di velocità e di quadrivelocità: mentre la velocità è una nozione che *dipende* dall'assegnazione di un riferimento, la nozione di quadrivelocità è del tutto indipendente da una tale assegnazione e non ha alcun corrispondente in meccanica classica.

Fissato un sistema di coordinate minkowskiane di un riferimento inerziale $\mathscr{F}$ ed una linea di universo ρ, nei punti in cui la curva è di tipo tempo possiamo sempre esprimere le componenti rispetto a $\mathscr{F}$ della quadrivelocità $V = V_\rho$ in funzione delle componenti della velocità $v = v_\rho|_{\mathscr{F}}$ rispetto a $\mathscr{F}$. Infatti sappiamo che

$$-c^2\gamma^2 + \sum_{\alpha=1}^{3}(V^\alpha)^2 = -c^2 .$$

dove $\gamma > 0$. L'identità di sopra si riscrive, tenendo conto della definizione di velocità

$$-c^2\gamma^2 + \sum_{\alpha=1}^{3}(\gamma v^\alpha)^2 = -c^2 .$$

da cui:

$$\begin{cases} \gamma & = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \, , \\ V^\alpha & = \gamma v^\alpha \, , \end{cases} \tag{4.8}$$

dove $v^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}(v^\alpha)^2$ è il modulo quadrato di v nella metrica spaziale di $\mathscr{F}$.
Nel caso di linee di universo di tipo luce, la relazione (4.8) cessa di valere, ma vale

$$\delta = \frac{1}{c}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}(U^\alpha)^2} \, , \tag{4.9}$$

in riferimento alla (4.7). La prova è immediata usando $\boldsymbol{\eta}(\dot\rho(u_0)|\dot\rho(u_0)) = 0$ unitamente a $\dot\rho(u_0) \in \mathfrak{J}^+_{\rho(u_0)}$ che implica per continuità la non negatività di δ.

Abbiamo il seguente teorema relativo all'idea popolare che afferma che "non si può superare la velocità della luce".

Teorema 4.1. *In ogni sistema di riferimento inerziale, il modulo (riferito alla metrica spaziale del riferimento) della velocità di una arbitraria linea di universo ρ è inferiore o al più uguale alla velocità della luce. Quest'ultimo fatto accade solo negli eventi sulla linea di universo in cui il vettore tangente è di tipo luce.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. Mettiamoci i coordinate minkowskiane solidali con il riferimento inerziale considerato.

$$|v|^2 = \boldsymbol{\eta}(v|v) = \sum_\alpha \left(\frac{U^\alpha}{\delta}\right)^2 .$$

Nel caso il vettore tangente sia di tipo luce, la (4.9) implica subito che l'ultimo membro di sopra sia c^2. Nel caso in cui il vettore tangente sia di tipo tempo vale $\boldsymbol{\eta}(V|V) = -c^2$ che si può riscrivere $c^2\gamma^2 = c^2 + V^2$, per cui $\gamma^2 \geq 1$ e $V^2 = c^2(\gamma^2 - 1)$. In questo caso, usando il tempo proprio come parametro:

$$|v|^2 = \boldsymbol{\eta}(v|v) = \sum_\alpha \left(\frac{V^\alpha}{\gamma}\right)^2 = c^2\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) .$$

L'ultimo membro è inferiore a c^2 dato che $\gamma^2 \geq 1$. $\square$

4.1.1 Velocità di trascinamento e legge di composizione delle velocità .

Per concludere mostriamo come definire la *velocità di trascinamento* di un riferimento inerziale $\mathscr{F}$ rispetto ad un altro riferimento inerziale $\mathscr{F}'$.
Consideriamo sistemi di coordinate minkowskiane in $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ le cui funzioni coordinate saranno indicate rispettivamente con x^0, x^1, x^2, x^3 e y^0, y^1, y^2, y^3. Un punto materiale in quiete con $\mathscr{F}$, avrà una linea di universo di tipo tempo descritta da $x^0 = x^0$, $x^\alpha = q^\alpha$ dove le q^α sono 3 costanti. Abbiamo usato il parametro x^0 per parametrizzare la curva. Nelle coordinate di $\mathscr{F}'$, la stessa linea di universo sarà descritta da

$$y^i(x^0) = C^i + \Lambda^i_\alpha q^\alpha + \Lambda^i_0 x^0 . \tag{4.10}$$

Dalla definizione 3.2, la velocità di tale linea di universo rispetto a $\mathscr{F}'$ sarà dunque, nelle coordinate y^1, y^2, y^3 indotte su ogni spazio di quiete di $\mathscr{F}'$:

$$v^\alpha_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'} = c\frac{\Lambda^\alpha{}_0}{\Lambda^0{}_0} . \tag{4.11}$$

Si osservi che il secondo membro è *costante*, nel senso che ha componenti costanti in coordinate minkowskiane ovvero determina, tramite l'isomorfismo tra spazio tangente e spazio delle traslazioni di $\mathbb{M}^4$, lo stesso vettore $v_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}$ nello spazio delle traslazioni di $\mathbb{M}^4$ indipendentemente dall'evento x. Indicheremo con $v_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}$ indifferentemente il campo vettoriale in ogni $\Sigma_{\mathscr{F}'t'}$ ovvero il vettore associato nello spazio delle traslazioni di $\mathbb{M}^4$. È facilissimo provare che cambiando sistemi di coordinate minkowskiane solidali a $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$, il vettore (campo vettoriale) $v_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}$ rimane immutato. È chiaro che tale vettore (campo vettoriale) altro non è che la velocità associata in $\mathscr{F}'$ al campo di quadrivelocità $\partial_{\mathscr{F}}$.

Definizione 4.4. (**Velocità di trascinamento**.) Siano $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ due sistemi di riferimento inerziali in $\mathbb{M}^4$ e si fissino due sistemi di coordinate minkowskiane solidali con i due riferimenti con funzioni coordinate x^0, x^1, x^2, x^3 e y^0, y^1, y^2, y^3 rispettivamente e $y^i = C^i + \Lambda^i{}_j x^j$. Il campo $v_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}$, definito da (4.11) su ogni spazio di quiete di $\mathscr{F}'$ in coordinate cartesiane indotte da coordinate minkowskiane solidali con $\mathscr{F}'$ è detto **velocità di trascinamento di** $\mathscr{F}$ rispetto a $\mathscr{F}'$. $\diamondsuit$

Vediamo ora di scrivere la legge che corrisponde in relatività speciale alla *legge di composizione delle velocità di trascinamento*. Consideriamo due riferimenti inerziali $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ connessi da una trasformazione $\mathscr{P}_{(C,\Lambda)} \in IO(1,3)\!\uparrow$ dove $C = 0$ e Λ è una *trasformazione di Lorentz speciale* lungo l'asse x^3 (vedi teorema 3.1). In base al teorema 3.1, per ogni coppia di sistemi di riferimento inerziali, è sempre possibile trovare due sistemi di coordinate solidali con ciascuno dei due in modo tale che la trasformazione di coordinate sia una trasformazione speciale di Lorentz lungo l'asse x^3. In virtù di ciò, quanto segue è in realtà del tutto generale. Parametrizziamo con la velocità $v_r = v^3_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'} = -v^3_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}}$ (vedi esercizio 4.1.4) invece che con $v^3_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}}$

$$\Lambda := \left[\begin{array}{c|ccc} \gamma_r & 0 & 0 & \gamma_r v_r/c \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma_r v_r/c & 0 & 0 & \gamma_r \end{array}\right]$$

Sopra $\gamma_r := 1/\sqrt{1 - v_r^2/c^2}$. Si osservi che con la scelta delle nostre coordinate $v^1_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'} = v^2_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'} = 0$.

Consideriamo quindi una linea di universo $\rho = \rho(u)$, in coordinate di $\mathscr{F}$ data da $x^i = x^i(u)$ e nelle coordinate di $\mathscr{F}'$ data da $y^i = C^i + \Lambda^i{}_j x^j(u)$. Indicheremo con v^α le componenti della velocità di ρ rispetto a $\mathscr{F}$ nelle coordinate x^α e con v'^α le componenti della velocità di ρ rispetto a $\mathscr{F}'$ nelle coordinate y^α.

Vogliamo determinare le componenti v'^α in funzione delle componenti v^α. Si osservi che il discorso può essere fatto *solo in componenti*, visto che i vettori velocità considerati appartengono a spazi vettoriali *differenti* e relativi a *spazi di quiete di riferimenti differenti.*

Applicando le due definizioni di sopra otteniamo subito, se V^α è la componente α-esima e $c\gamma$ la componente 0-esima nelle coordinate di $\mathscr{F}$ della quadrivelocità di ρ e V'^α, $c\gamma'$ sono le analoghe componenti in $\mathscr{F}'$:

$$v'^\alpha = \frac{V'^\alpha}{\gamma'} = c\frac{\Lambda^\alpha{}_\beta V^\beta + \Lambda^\alpha{}_0 c\gamma}{\Lambda^0{}_0 c\gamma + \Lambda^0{}_\delta V^\delta} = c\frac{\Lambda^\alpha{}_\beta v^\beta + \Lambda^\alpha{}_0 c}{c\Lambda^0{}_0 + \Lambda^0{}_\delta v^\delta}\,,$$

e quindi

$$v'^\alpha = \frac{\frac{\Lambda^\alpha{}_\beta}{\Lambda^0{}_0} v^\beta + c\frac{\Lambda^\alpha{}_0}{\Lambda^0{}_0}}{1 + \frac{\Lambda^0{}_\delta}{\Lambda^0{}_0}\frac{v^\delta}{c}} = \frac{\frac{\Lambda^\alpha{}_\beta}{\Lambda^0{}_0} v^\beta + v^\alpha_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}}{1 + \frac{\Lambda^0{}_\delta}{\Lambda^0{}_0}\frac{v^\delta}{c}}\,.$$

Usando la forma esplicita della matrice Λ troviamo

$$\begin{cases} v'^1 &= \frac{v^1}{\gamma_r\left(1+\frac{v^3 v_r}{c^2}\right)}\,, \\ v'^2 &= \frac{v^2}{\gamma_r\left(1+\frac{v^3 v_r}{c^2}\right)}\,, \\ v'^3 &= \frac{v^3+v_r}{1+\frac{v^3 v_r}{c^2}}\,, \end{cases}$$

che possiamo riscrivere, con ovvie notazioni

$$\begin{cases} v'^\perp &= \frac{v^\perp}{\gamma_r\left(1+\frac{v^{||} v_r}{c^2}\right)}\,, \\ v'^{||} &= \frac{v^{||}+v_r}{1+\frac{v^{||} v_r}{c^2}}\,. \end{cases} \tag{4.12}$$

Questa è la **legge di composizione delle velocità relativistiche**.
Si osservi che anche per moti che avvengono unicamente nelle direzioni perpendicolari alla velocità relativa tra i due riferimenti (nel giudizio di entrambi i riferimenti), il modulo della velocità di un punto materiale rispetto a $\mathscr{F}'$ risulta comunque diminuita rispetto a quella valutata in $\mathscr{F}$ di un fattore $1/\gamma_r < 1$ (che tende comunque a 1 nel limite $v_r/c \to 0^+$ per raccordarsi alla situazione classica). Viceversa se denotiamo $v := v^{||}$ e $v' = v'^{||}$ e se consideriamo solo moti che avvengono lungo l'asse x^3 in $\mathscr{F}$ (che implica che il moto avvenga lungo l'asse x'^3 in $\mathscr{F}'$), l'unica relazione non banale è la **legge di composizione delle velocità per trasformazioni speciali**:

$$v' = \frac{v + v_r}{1 + \frac{vv_r}{c^2}} \,. \tag{4.13}$$

Si può notare che per "piccole velocità", ossia $vv_r \ll c^2$, la formula si riduce all'analoga galileiana. Inoltre nel caso limite $v = \pm c$ otteniamo $v' = \pm c$ in conformità con il teorema 4.1.
In termini di velocità di trascinamento, se $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ e $\mathscr{F}''$ sono sistemi di riferimento inerziali e sono note le componenti delle rispettive velocità di trascinamento $v_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}$ in $\mathscr{F}'$ e $v_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}''}$ in $\mathscr{F}''$ e ancora la trasformazione di coordinate tra $\mathscr{F}'$ e $\mathscr{F}''$ è speciale lungo il terzo asse spaziale, allora le componenti di $v_{\mathscr{F}|\mathscr{F}''}$ in $\mathscr{F}''$ soddisfano la **legge di composizione relativistica delle velocità di trascinamento** in contrapposizione con l'analoga classica che corrisponde alla semplice somma di velocità :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v^{\perp}_{\mathscr{F}|\mathscr{F}''} & = v^{\perp}_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}\gamma^{-1}_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}''}\left(1 + \frac{1}{c^2}v^{||}_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}v_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}''}\right)^{-1} \,, \\ v^{||}_{\mathscr{F}|\mathscr{F}''} & = \left(v^{||}_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'} + v_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}''}\right)\left(1 + \frac{1}{c^2}v^{||}_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}v_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}''}\right)^{-1} \,. \end{array} \right. \tag{4.14}$$

Le componenti "parallele" e "perpendicolari" sono riferite all'asse ("comune") lungo il quale avviene il moto relativo di $\mathscr{F}'$ e $\mathscr{F}''$ e, con abuso di notazione, $v_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}''}$ denota l'unica componente di tale velocità nella base associata alle coordinate minkowskiane in $\mathscr{F}''$.

Esercizi 4.1.

1. Si consideri $p \in \mathbb{M}^4$ ed un riferimento inerziale $\mathscr{F}$. Dalla teoria generale delle decomposizioni dirette, esisteranno due operatori lineari surgettivi detti *proiettori della decomposizione*; $P_{\partial_{\mathscr{F}p}} : T_p\mathbb{M}^4 \to L(\partial_{\mathscr{F}p})$ e $P_{\Sigma_{\mathscr{F}p}} : T_p\mathbb{M}^4 \to T_p\Sigma_{\mathscr{F}p}$ tali che, per ogni $v \in T_p\mathbb{M}^4$, $P_{\partial_{\mathscr{F}p}}(v) = T_v$ e $P_{\Sigma_{\mathscr{F}p}}(v) = X_v$.
Provare che:
(i) $P_{\partial_{\mathscr{F}p}}P_{\partial_{\mathscr{F}p}} = P_{\partial_{\mathscr{F}p}}$ e $P_{\Sigma_{\mathscr{F}p}}P_{\Sigma_{\mathscr{F}p}} = P_{\Sigma_{\mathscr{F}p}}$,
(ii) $P_{\partial_{\mathscr{F}p}} + P_{\Sigma_{\mathscr{F}p}} = I$,
(iii)$P_{\partial_{\mathscr{F}p}}P_{\Sigma_{\mathscr{F}p}} = P_{\Sigma_{\mathscr{F}p}}P_{\partial_{\mathscr{F}p}} = 0$.

2. Mostrare che se $t_{\mathscr{F}}$ è la coordinata temporale globale associata a $\mathscr{F}$, e $p \in \mathbb{M}^4$:

$$P_{\partial_{\mathscr{F}p}} = c\langle \quad, dt_{\mathscr{F}p}\rangle\partial_{\mathscr{F}p} \,,$$

e quindi

$$P_{\Sigma_{\mathscr{F}p}} = I - c\langle \quad, dt_{\mathscr{F}p}\rangle\partial_{\mathscr{F}p} \,.$$

3. Gli spazi $L(\partial_{\mathscr{F}p})$ e $T_p\Sigma_{\mathscr{F}p}$ sono chiaramente ortogonali. Esiste un teorema che assicura che se V è uno spazio con prodotto scalare e $V = V_1 + V_2$ dove V_1 e V_2 sono sottospazi reciprocamente ortogonali, allora la decomposizione è diretta: $V = V_1 \oplus V_2$ (cioè, per ogni vettore di V la coppia di vettori in V_1 e V_2 la cui somma è il vettore detto è unica). Perché non abbiamo potuto usare tale teorema?

4. Scelti dei sistemi di coordinate minkowskiane in $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ come in definizione 4.4, si provi che in tali coordinate, le componenti di $v_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}$ e $v_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}}$ sono legate da

$$v^\alpha_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'} = -v^\alpha_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}} \,.$$

5. Mostrare che la velocità di trascinamento di un riferimento inerziale $\mathscr{F}$ rispetto ad un altro $\mathscr{F}'$ non dipende dai sistemi di coordinate minkowskiane solidali con i due riferimenti usati per definire le componenti di tale velocità.

6. Si considerino due riferimenti inerziali $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$. Si supponga che un punto materiale in moto rettilineo uniforme rispetto a $\mathscr{F}'$ abbia velocità relativa rispetto a $\mathscr{F}'$ data dal vettore u in uno spazio di quiete di $\mathscr{F}'$. Sia nota $v := v_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}$ come vettore nello stesso spazio di quiete. Dimostrare che se w è la velocità del punto materiale rispetto a $\mathscr{F}$ (in un suo spazio di quiete) allora

$$|w| = c\sqrt{1 - \frac{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)}{(1-u\cdot v/c^2)^2}}\,,$$

dove $v^2 := |v|^2$, $u^2 := |u|^2$ i moduli essendo calcolati con la metrica spaziale dei corrispondenti riferimenti e $\cdot$ denota il prodotto scalare associato alla metrica spaziale di $\mathscr{F}'$.

7. In uno spazio affine $\mathbb{A}$, una *retta* uscente da $P \in \mathbb{A}$ con vettore tangente $n \in V$ spazio delle traslazioni di $\mathbb{A}$, è definita come $\mathbb{R} \ni u \mapsto P + un$. Si dimostri che se $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{M}^4$ è una linea di universo descrivente l'evoluzione di un punto materiale in moto rettilineo uniforme rispetto a qualche riferimento inerziale, $\rho = \rho(u)$ (dove u è un parametro arbitrario tale che $\dot\rho$ è di tipo causale futuro) è una retta di $\mathbb{M}^4$ con vettore tangente di tipo causale futuro, oppure esiste una riparametrizzazione di ρ che non ne altera il verso di percorrenza e che la trasforma in una retta con vettore tangente di tipo causale futuro.
Viceversa provare che una retta di $\mathbb{M}^4$ con vettore tangente di tipo causale futuro è una linea di universo che descrive il moto rettilineo uniforme di un punto materiale rispetto a qualche riferimento inerziale e se il vettore non è di tipo luce, il parametro che descrive la retta è legato al tempo proprio tramite una trasformazione lineare non omogenea con coefficiente moltiplicativo strettamente positivo.

4.2 Dilatazione degli intervalli di tempo e "paradosso" dei gemelli.

Consideriamo una linea di universo di tipo tempo $\rho = \rho(\tau)$ dove $\tau \in \mathbb{R}$ è il tempo proprio misurato dall'orologio ideale in quiete con il punto materiale associato alla linea di universo.

Consideriamo quindi un riferimento inerziale $\mathscr{F}$ con funzione coordinata temporale $t_{\mathscr{F}}$ i cui valori etichettano gli spazi di quiete $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ di $\mathscr{F}$. Supponiamo che l'orologio solidale con il punto materiale sia sincronizzato su $\Sigma_{\mathscr{F}t_1}$ con gli orologi di $\mathscr{F}$ per cui $\tau(t_1) = t_1$ quando ρ interseca $\Sigma_{\mathscr{F}t_1}$. Lasciamo evolvere la linea di universo fino a quando ρ interseca $\Sigma_{\mathscr{F}t_2}$. La domanda che ci poniamo è: *che tempo $\tau(t_2)$ segnerà l'orologio solidale con ρ in tale evento?*
È facile provare (vedi sotto) che se il modulo della velocità di ρ rispetto a $\mathscr{F}$ è costante, vale la celebre formula della **dilatazione degli intervalli di tempo**:

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \,, \tag{4.15}$$

dove $\Delta t := t_2 - t_1$ e $\Delta \tau := \tau(t_2) - \tau(t_1)$. In questo caso particolare è chiaro che deve valere $t_2 > \tau(t_2)$ quando $\tau(t_1) = t_1$ se $v \neq 0$.
Vogliamo mostrare che nel caso generale, eccettuato il caso in cui il punto materiale è sempre in quiete in $\mathscr{F}$ in $[t_1, t_2]$, l'orologio solidale con ρ segnerà un tempo $\tau(t_2) < t_2$. Tale fenomeno cade sotto il nome di **dilatazione degli intervalli di tempo**[1].
Per provare l'asserto di sopra, riparametrizziamo la linea di universo attraverso la coordinata $t_{\mathscr{F}}$. Questo è sempre possibile perché, fissato un sistema di coordinate minkowskiane solidale con $\mathscr{F}$, ρ è descritta da funzioni differenziabili $x^i = x^i(\tau)$ con $dx^0/d\tau > 0$ al fine di avere quadrivelocità diretta verso il futuro, inoltre x^0 e $ct_{\mathscr{F}}$ differiscono per una costante additiva che possiamo sempre supporre essere nulla ridefinendo $t_{\mathscr{F}}$. Faremo tale scelta d'ora in poi. Usando la definizione 3.1 avremo che

$$\tau(t_2) - \tau(t_1) = \frac{1}{c} \int_{ct_1}^{ct_2} \sqrt{1 - \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{dx^\alpha}{dx^0} \right)^2} \, dx^0$$

In altri termini, tenendo conto della definizione di velocità rispetto a $\mathscr{F}$:

$$\tau(t_2) - \tau(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \, dt \,, \tag{4.16}$$

dove con $v^2(t)$ abbiamo denotato il modulo della velocità di ρ rispetto a $\mathscr{F}$ su $\Sigma_{\mathscr{F}t}$. In particolare se il modulo della velocità è costante, abbiamo la (4.15). Essendo tutte le funzioni continue

$$\tau(t_2) - \tau(t_1) \leq (t_2 - t_1) \max \left\{ \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \,\middle|\, t \in [t_1, t_2] \right\} \leq (t_2 - t_1) \cdot 1 \,,$$

e quindi

$$\tau(t_2) - \tau(t_1) \leq t_2 - t_1 \,.$$

Sicuramente vale il segno di uguaglianza se $v \equiv 0$ su $[t_1, t_2]$. Mostriamo che ciò accade esclusivamente in tale caso. Infatti se $v(t_0) > 0$ per qualche $t_0 \in [t_1, t_2]$, per continuità ciò accadrà in un

[1] La dilatazione è ovviamente riferita all'intervallo di tempo misurato da $\mathscr{F}$ rispetto a quello di tempo proprio.

intorno di t_0, per cui ci sarà un intorno di t_0 in cui $\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}} < 1$. Restringendo tale intorno, a causa della continuità troveremo un intorno aperto U di t_0 su cui (e sulla cui chiusura) vale $\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}} < 1-\epsilon$ per qualche $\epsilon > 0$. In definitiva, ci sarà un intervallo aperto $(a,b) \subset [t_1,t_2]$ su cui $\sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}} < 1-\epsilon$. Quindi, se $A = [t_1,t_2] \setminus (a,b)$

$$\tau(t_2) - \tau(t_1) = \int_A \sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt + \int_a^b \sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt$$

Il secondo membro è maggiorato da

$$\int_A 1\, dt + \int_a^b (1-\epsilon)\, dt < \int_A 1\, dt + \int_a^b 1\, dt = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1\,.$$

Abbiamo quindi trovato che:

Teorema 4.2. *Sia $\rho : \mathbb{R} \ni \tau \mapsto \mathbb{M}^4$ una linea di universo di tipo tempo parametrizzata nel tempo proprio e sia $\mathscr{F}$ un sistema di riferimento inerziale con coordinata temporale globale $t_{\mathscr{F}}$. Se ρ interseca $\Sigma_{\mathscr{F}t_1}$ al tempo proprio τ_1 ed interseca $\Sigma_{\mathscr{F}t_2}$ al tempo proprio τ_2 allora:*

$$\tau_2 - \tau_1 \leq t_2 - t_1\,,$$

In particolare, se per qualche istante di tempo proprio la velocità di ρ rispetto a $\mathscr{F}$ non è nulla, allora necessariamente:

$$\tau_2 - \tau_1 < t_2 - t_1\,.$$

$\diamondsuit$

Commenti 4.2.
(1) Il teorema di sopra ha una conseguenza interessante. È chiaro che l'intervallo di tempo proprio misurato lungo una curva causale si può interpretare come una "lunghezza Lorentziana", in quanto (4.6) ha la stessa struttura della formula della lunghezza di una curva in geometria Riemanniana. Una differenza importante è che ci sono curve che non si riducono ad un punto e che hanno "lunghezza Lorentziana" nulla: tutte le curve con vettore tangente di tipo luce hanno tale proprietà. Tuttavia c'è un'altra proprietà notevole che distingue la lunghezza riemanniana da quella lorentziana. Consideriamo un punto materiale in moto rettilineo uniforme rispetto a qualche riferimento inerziale e fissiamo due eventi p e q lungo la sua linea di universo ρ. Quindi consideriamo un secondo punto materiale la cui linea di universo ρ' connette la stessa coppia di eventi. Dato che possiamo sempre trovare un riferimento inerziale in cui il primo punto è in quiete, in base al teorema precedente, la "lunghezza Lorentziana"

$$\ell_\rho := \int_\rho \sqrt{-\boldsymbol{\eta}(\dot\rho(u)|\dot\rho(u))}du\,,$$

sarà sempre *maggiore o uguale* della "lunghezza Lorentziana"

$$\ell_{\rho'} := \int_{\rho'} \sqrt{-\boldsymbol{\eta}(\dot{\rho'}(u)|\dot{\rho'}(u))}du \,.$$

La linea di universo ρ tra p e q è un *segmento di retta* rispetto alla struttura affine di $\mathbb{M}^4$, *l'unico* segmento che connette p e q, mentre in generale ρ' è una curva generica di tipo tempo che connette gli stessi eventi.
Quindi: al contrario di quanto accade nella geometria riemanniana, il segmento di retta di tipo tempo futuro che connette una coppia di eventi temporalmente connessi *massimizza* il funzionale "lunghezza lorentziana" definito sulla classe delle curve di tipo tempo futuro che connettono tali eventi. In geometria riemanniana i segmenti di retta su varietà globalmente piatte *minimizzano* l'analogo funzionale.
(2) Un caso rilevante del teorema di sopra è quando ρ descrive l'evoluzione di un punto materiale in quiete con un secondo sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}'$. In tal caso gli intervalli di tempo proprio $[\tau_1, \tau_2]$ coincidono con intervalli di tempo misurati rispetto all coordinata temporale globale di $\mathscr{F}'$. Di conseguenza ciascun osservatore giudicherà gli intervalli di tempo, misurati con i suoi orologi di quiete, dilatati rispetto agli intervalli di tempo misurati dall'altro osservatore, quando tali intervalli siano riferiti a coppie di eventi come precisato sopra.
Apparentemente la situazione è paradossale perché il ruolo giocato dai due riferimenti sembra essere interscambiabile (si ricordi che i moduli della velocità di trascinamento di $\mathscr{F}$ rispetto a $\mathscr{F}'$ e quello della velocità di trascinamento di $\mathscr{F}'$ rispetto a $\mathscr{F}$ sono uguali) mentre il loro ruolo nel risultato finale sicuramente non lo è. Tuttavia la spiegazione è semplice. Nel confronto

$$\tau_2 - \tau_1 < t_2 - t_1 \,.$$

Sopra τ è ora riferito la coordinata temporale di $\mathscr{F}'$, il ruolo giocato dai due osservatori *non è simmetrico*: per $\mathscr{F}'$ gli eventi considerati a cui si attribuiscono i tempi τ_1 e τ_2 sono *nello stesso posto spaziale* e i tempi suddetti sono valutati da un unico orologio in quiete con $\mathscr{F}'$, mentre per $\mathscr{F}$ tali eventi non sono nello stesso posto e ci vogliono due orologi in quiete con $\mathscr{F}$ per misurare t_1 e t_2.
Affinché $\mathscr{F}$ verifichi un analogo fenomeno di dilatazione dei suoi intervalli temporali rispetto a quelli di $\mathscr{F}'$ sarà necessario considerare *un'altra coppia di eventi*, questa volta *nello stesso posto per $\mathscr{F}$* ma non più nello stesso posto per $\mathscr{F}'$.
(3) Il fenomeno della dilatazione degli intervalli di tempo è stato un importante test per valutare sperimentalmente la teoria della relatività. In effetti tale fenomeno è *comunemente* osservato dagli sperimentatori che lavorano con particelle subatomiche instabili. Tali particelle, una volta prodotte, decadono in altre particelle dopo un certo tempo T_0 detto *vita media* e definito in un sistema di riferimento in quiete con la particella stessa. Quando le particelle in esame vengono prodotte con velocità v vicine a quelle della luce, rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, si assiste ad una dilatazione della vita media in conformità con la relazione, valida per velocità costanti,

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,.$$

Per esempio per quanto riguarda esperimenti con *pioni* vedi [20]. Si osservi che per applicare la formula di sopra, ovvero la (4.15), è sufficiente che *il modulo* della velocità sia costante, la direzione può cambiare: la formula è applicabile a moti circolari uniformi.
Il fenomeno della dilatazione degli intervalli di tempo, ed in particolare (4.15) su moti circolari uniformi, è stato anche testato sperimentalmente usando orologi atomici in volo attorno alla terra in direzioni opposte ed a velocità uguali e costanti rispetto alla terra. L'esperimento è quello famosissimo di Haefele and Keating che ha dato esito positivo. Nell'idea di tale esperimento si tiene conto del fatto che la terra non è un riferimento inerziale a causa del moto di rotazione attorno al proprio asse (il moto di rivoluzione attorno al sole è trascurabile). Il sistema inerziale di riferimento è dunque quello in cui la terra è vista ruotare sul proprio asse alla velocità angolare di 2π radianti in 24 ore. In questo sistema di riferimento $\mathscr{F}$ si usano le formule della dilatazione degli intervalli di tempo per gli orologi in volo tenendo conto delle velocità degli aerei che trasportano gli orologi. Si osservi che le velocità dei due aerei riferite a $\mathscr{F}$ sono *diverse* per cui si hanno differenti ritardi rispetto ad un orologio in quiete in $\mathscr{F}$, ma anche rispetto ad un orologio in rotazione con la terra. Da [21]: *During October, 1971, four cesium atomic beam clocks were flown on regularly scheduled commercial jet flights around the world twice, once eastward and once westward, to test Einstein's theory of relativity with macroscopic clocks. From the actual flight paths of each trip, the theory predicted that the flyng clocks, compared with reference clocks at the U.S. Naval Observatory, should have lost* 40 ± 23 *nanoseconds during the eastward trip and should have gained* 275 ± 21 *nanoseconds during the westward trip ... Relative to the atomic time scale of the U.S. Naval Observatory, the flying clocks lost* 59 ± 10 *nanoseconds during the eastward trip and gained* 273 ± 7 *nanosecond during the westward trip, where the errors are the corresponding standard deviations.*
Eastward Journey

$$\begin{array}{lcrl} \text{Predicted} & - & 40 & \pm 23 ns \\ \text{Measured} & - & 59 & \pm 10 ns \end{array}$$

Wesward Journey

$$\begin{array}{lcrl} \text{Predicted} & + & 275 & \pm 21 ns \\ \text{Measured} & + & 273 & \pm 7 ns \end{array}$$

(4) Nel contesto del fenomeno della dilatazione degli intervalli di tempo, si inserisce il celebre "paradosso dei gemelli". Si considerano due gemelli A e B inizialmente in quiete relativa. Quindi B parte su un'astronave e viaggia a velocità prossime a quelle della luce rispetto ad A. Quando B torna in quiete con A dovrà essere più giovane di A per il fenomeno della dilatazione degli intervalli di tempo. Il punto apparentemente paradossale è che "il moto è relativo", per cui si può pensare che sia stato A a viaggiare ad alte velocità rispetto a B. In definitiva A dovrebbe essere a sua volta più giovane di B!
La spiegazione è la seguente. Gli intervalli di tempo misurati dai due gemelli rispetto al personale tempo proprio, tra l'evento partenza p e l'evento ritorno r si ottengono integrando $\sqrt{-\boldsymbol{\eta}(\dot{\rho}_A(u)|\dot{\rho}_A(u))}$ e $\sqrt{-\boldsymbol{\eta}(\dot{\rho}_B(u)|\dot{\rho}_B(u))}$ sulle corrispondenti linee di universo e tra i due

eventi detti, $\rho_A : (a,b) \to \mathbb{M}^4$ e $\rho_B : (a,b) \to \mathbb{M}^4$ dove per comodità e senza perdere generalità, si è usato lo stesso parametro.
Quindi è possibile dare una risposta non contraddittoria all'interno del formalismo della teoria alla domanda: *chi sarà alla fine più giovane? La risposta dipenderà dalla forma delle due linee di universo.* In particolare per il teorema dimostrato, se una delle due linee di universo, diciamo quella di A, descrive il moto di quiete in un riferimento inerziale, il gemello B risulterà al suo ritorno più giovane di A. Si osservi che in tal caso la linea di universo di B non può descrivere anche essa un moto di quiete rispetto ad un (altro) riferimento inerziale. Dal punto di vista fisico, mettendosi in quiete nel riferimento inerziale di A, B deve prima allontanarsi e poi riavvicinarsi ad A, per cui il suo moto sarà *accelerato* rispetto ad A e non ci sarà alcun riferimento inerziale in cui B è in quiete. Dal punto di vista geometrico, come in ogni spazio affine, c'è un unico segmento di retta (temporale futura) che congiunge i due eventi p e r e al più uno solo dei due gemelli può avere linea di universo descritta da tale segmento e quindi essere in quiete in un riferimento inerziale (qui il segmento è una porzione di una linea di universo di un punto in quiete).
In definitiva l'affermazione *"il moto è relativo"* è falsa quando non si considerino moti rettilinei uniformi.
(5) Altri due fenomeni connessi con il fenomeno della dilatazione degli intervalli temporali sono i seguenti. Uno è **l'effetto Doppler trasverso**: se una sorgente di onde elettromagnetiche ruota a velocità costante v attorno ad un rilevatore, la frequenza rilevata è diversa da quella misurata in quiete con la sorgente. Tale effetto è del tutto assente in fisica classica. La spiegazione è ancora una volta data dalla formula

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,,$$

dove ora T_0 è il periodo di emissione dell'onda valutato nel riferimento di quiete della sorgente e T è il periodo valutato nel riferimento del laboratorio in cui la sorgente ruota a velocità costante v. Passando alle frequenze f_0, f (che sono inversamente proporzionali ai periodi), la formula di sopra implica subito, con analogo significato dei simboli,

$$f = f_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \,,$$

in cui si vede che la frequenza osservata è più bassa rispetto a quella in quiete con la sorgente.
L'altro fenomeno è **l'allargamento di fasci di particelle cariche**. Se si cerca di preparare un fascio di particelle cariche dello stesso segno si deve tenere conto della repulsione reciproca che provoca inevitabilmente un allargamento della sezione trasversale del fascio. Tuttavia tale fenomeno di allargamento appare tanto più lento quanto più il fascio è veloce. Un'altra volta la spiegazione qualitativa e quantitativa si può dare con il fenomeno della dilatazione degli intervalli di tempo.

4.3 Peculiarità della cinematica relativistica.

Consideriamo ora un altro tipico fenomeno relativistico, quello della *contrazione dei volumi e delle lunghezze: ci chiediamo come varino le proprietà metriche di un corpo descritto in un riferimento inerziale in cui è in moto (a velocità costante), rispetto alle analoghe proprietà valutate nel riferimento di quiete con il corpo.*

In meccanica classica le proprietà geometriche dei corpi non dipendono dal riferimento dato che le metriche spaziali sono proprietà assolute indipendenti dal riferimento. In relatività le metriche spaziali sono invece indotte da quella spaziotemporale $\boldsymbol{\eta}$ sugli spazi di quiete dei vari riferimenti. Pertanto non è per nulla ovvio che le proprietà metriche dei corpi siano invarianti al variare del riferimento.

Fissiamo due riferimenti inerziali $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$. Sia $\Omega \subset \Sigma_{\mathscr{F}t_0}$ una sottovarietà di $\Sigma_{\mathscr{F}t_0}$ di dimensione $m \leq 3$, per qualche $t_0 \in \mathbb{R}$ e supporremo in seguito che tale sottovarietà abbia misura, indotta da quella spaziale di $\Sigma_{\mathscr{F}t_0}$, finita. Se assumiamo, al fine di investigare la questione sollevata sopra, che Ω denoti un insieme di punti materiali che al variare di $t_{\mathscr{F}}$ rimangano in quiete con $\mathscr{F}$, tale insieme genera un *tubo di universo*

$$\mathscr{T}_\Omega = \{x + t\partial_{\mathscr{F}} \mid x \in \Omega\,,\, t \in \mathbb{R}\}$$

dove $\partial_{\mathscr{F}}$ è interpretato come vettore nello spazio affine delle traslazioni di $\mathbb{M}^4$. Notiamo che ogni sezione di $\mathscr{T}_\Omega$, Ω_{t_1} ottenuta intersecando $\mathscr{T}_\Omega$ con $\Sigma_{\mathscr{F}t_1}$ è chiaramente isometrica ad ogni altra sezione $\Omega_{t_2} = \mathscr{T}_\Omega \cap \Sigma_{\mathscr{F}t_2}$ (in particolare Ω stesso) sotto l'azione della traslazione

$$\Omega_{t_1} \ni x \mapsto x + (t_2 - t_1)\partial_{\mathscr{F}} \in \Omega_{t_2}\,.$$

Prendiamo ora un nuovo riferimento inerziale $\mathscr{F}'$ in cui l'insieme di punti materiali suddetti è visto muoversi. Il riferimento $\mathscr{F}'$ sezionerà il tubo di universo $\mathscr{T}_\Omega$ con i suoi spazi di quiete $\Sigma_{\mathscr{F}t'}$ in una classe di insiemi $\Omega'_{t'} = \mathscr{T}_\Omega \cap \Sigma_{\mathscr{F}'t'}$ che in generale avranno una forma e proprietà geometriche e metriche differenti da quelle di Ω. Tuttavia le traslazioni, rappresentanti l'evoluzione spaziotemporale del corpo,

$$\Omega'_{t'_1} \ni x \mapsto x + (t'_2 - t'_1)\sqrt{1 - (v_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'})^2/c^2}\,\partial_{\mathscr{F}} \in \Omega'_{t'_2}\,, \tag{4.17}$$

saranno ancora isometrie ovvero, in altre parole, il moto del corpo apparirà come *rigido*. Per provare quanto detto notiamo che ogni funzione di traslazione $V : \mathbb{M}^4 \ni x \mapsto x + v \in \mathbb{M}^4$, se v è nello spazio delle traslazioni di $\mathbb{M}^4$, è un diffeomorfismo ed un'isometria rispetto alla metrica $\boldsymbol{\eta}$. L'immagine di $\Sigma_{\mathscr{F}'t'_1}$ secondo un tale diffeomorfismo è proprio $\Sigma_{\mathscr{F}'t'_2}$ se il $v = k\partial_{\mathscr{F}}$[2] dove

$$(t'_2 - t'_1) = -\boldsymbol{\eta}(k\partial_{\mathscr{F}}|\partial_{\mathscr{F}'})\,.$$

[2]Infatti, fissando una base pseudo ortonormale in $O \in \Sigma_{\mathscr{F}'t'_1}$ con e_0 dato da $\partial_{\mathscr{F}'}$ e gli altri tre versori di tipo spazio contenuti in $T_O\Sigma_{\mathscr{F}'t'_1}$, si conclude subito che $O + k\partial_{\mathscr{F}}$ è un punto di$\Sigma_{\mathscr{F}'t'_2}$ quando la componente rispetto a e_0 di tale vettore nella base detta vale $t'_2 - t'_1$.

Ma, per definizione di velocità di trascinamento ed usando (4.8),

$$-\boldsymbol{\eta}(\partial_{\mathscr{F}}|\partial_{\mathscr{F}'}) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}/c^2}} \,,$$

da cui si ottiene la (4.17). Restringendosi alla sottovarietà $\Omega'_{t'_1}$, l'immagine secondo V di tale insieme è la sottovarietà diffeomorfa ed isometrica $\Omega'_{t'_2}$. Quindi il diffeomorfismo finale da $\Omega'_{t'_1}$ a $\Omega'_{t'_2}$ sarà ancora un'isometria nelle metriche indotte da $\boldsymbol{\eta}$ sulle sottovarietà considerate.
Vogliamo determinare le relazioni metriche tra le sottovarietà Ω_t (che rappresentano un insieme di punti materiali *fermi* nel riferimento $\mathscr{F}$) rispetto a $\Omega'_{t'}$ (che rappresentano lo stesso inseme di punti materiali che è visto in movimento in $\mathscr{F}'$). È chiaro che possiamo confrontare due qualsiasi elementi delle due classi dette sopra essendo, all'interno di ogni classe, tutte le sottovarietà tra di loro isometriche.
Per procedere è molto comodo parametrizzare la sottovarietà $\Omega'_{t'}$ che è definita nello spazio di quiete di $\mathscr{F}'$, usando le coordinate spaziali dell'altro riferimento: $\mathscr{F}$. Infatti scegliendo un opportuno sistema di coordinate minkowskiane solidali con $\mathscr{F}$, Ω si può descrivere come $x^0 = 0$ e $(x^1, x^2, x^3) \in D$, dove $D \subset \mathbb{R}^3$ è diffeomorfo a Ω. Scegliamo un sistema di coordinate minkowskiane solidali con $\mathscr{F}'$. L'insieme $\Omega' = \mathcal{T}_\Omega \cap \Sigma_{\mathscr{F}' t'_0}$ per una fissata costante t'_0 è individuato dalle condizioni $x'^0 = ct'_0$ e $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta$, $(x^1, x^2, x^3) \in D$. Quindi, in coordinate di $\mathscr{F}$, l'insieme Ω' è individuato risolvendo

$$ct'_0 = \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_\alpha x^\alpha \,.$$

In tal modo Ω' corrisponde all'insieme di $\mathbb{R}^4$:

$$x^0 = \frac{ct'_0 - \Lambda^0{}_\alpha x^\alpha}{\Lambda^0{}_0} \quad \text{con } (x^1, x^2, x^3) \in D \,.$$

È chiaro che possiamo usare le coordinate x^1, x^2, x^3 per definire una carta globale su un aperto U' contenente Ω' (eventualmente $U' = \Omega'$ se Ω è una sottovarietà tridimensionale) le cui coordinate, per evitare ambiguità, le indicheremo con y^1, y^2, y^3. In queste coordinate la metrica spaziale di $\mathscr{F}'$ ossia quella indotta da $\boldsymbol{\eta}$ su U' è data dai coefficienti:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \eta_{ij}$$

dove

$$x^\alpha = y^\alpha \,, \tag{4.18}$$

$$x^0 = \frac{ct'_0 - \Lambda^0{}_\alpha y^\alpha}{\Lambda^0{}_0} \,. \tag{4.19}$$

Il calcolo esplicito di $g'_{\alpha\beta}$ fornisce:

$$g'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \frac{\Lambda^0{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta}{(\Lambda^0{}_0)^2} \tag{4.20}$$

Questa identità permette di confrontare le proprietà metriche di Ω con quelle di Ω'. Esamineremo tre casi nelle prossime tre sezioni.

4.3.1 Contrazione dei Volumi.

Assumiamo che Ω sia una sottovarietà tridimensionale che indicheremo con V con misura (volume) finita. Confronteremo i volumi di V, $\mathrm{vol}(V)$ con quello di V', $\mathrm{vol}(V')$ riferiti alle metriche spaziali dei corrispettivi riferimenti inerziali.
A tal fine si ha

$$\mathrm{vol}(V') = \int_D \sqrt{\det g'} dy^1 dy^2 dy^3$$

dove g' è la matrice di coefficienti $g'_{\alpha\beta}$, mentre

$$\mathrm{vol}(V) = \int_D dx^1 dx^2 dx^3$$

dato che la metrica spaziale di $\mathscr{F}$ nelle coordinate minkowskiane è rappresentata da $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Per costruzione $\sqrt{\det g'}$ è una costante nelle coordinate y^1, y^2, y^3 e ancora $y^\alpha = x^\alpha$ su D.
Concludiamo che

$$\mathrm{vol}(V') = \sqrt{\det g'}\,\mathrm{vol}(V)\,.$$

Lemma 4.1. *Se A è una matrice complessa $n \times n$ di coefficienti $A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + C_\alpha C_\beta$, vale*

$$det\, A = 1 + \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^2\,.$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Vale

$$\det A = \epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_n} A_{1\alpha_1} \cdots A_{n\alpha_n}\,,$$

dove ϵ è la *densità tensoriale di Ricci-Levi-Civita* [1] e vale $\epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = \pm 1$ se $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ è una permutazione di $1, \ldots, n$ ed il segno $\pm$ è dato dalla parità della permutazione: $-$ se la permutazione è dispari, mentre $+$ se la permutazione è pari. Infine $\epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_n} = 0$ se $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ *non* è una permutazione di $1, \ldots, n$.
In altre parole

$$\det A = \epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \left(\delta_{1\alpha_1} \cdots \delta_{n\alpha_n} + C_1 C_{\alpha_1} \delta_{2\alpha_2} \cdots \delta_{n\alpha_n} + \cdots + \delta_{1\alpha_1} \cdots \delta_{n-1\alpha_{n-1}} C_n C_{\alpha_n} \right)\,,$$

tutti gli altri termini forniscono contributo nullo perché sono del tipo

$$\epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_h \cdots \alpha_n} \cdots C_k C_{\alpha_k} \cdots C_h C_{\alpha_h} \cdots = \epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_h \cdots \alpha_k \cdots \alpha_n} \cdots C_h C_{\alpha_h} \cdots C_k C_{\alpha_k} \cdots$$

e

$$\epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_h \cdots \alpha_n} = -\epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_h \cdots \alpha_k \cdots \alpha_n}\,.$$

Ma
$$\epsilon^{\alpha_1\cdots\alpha_n}\left(\delta_{1\alpha_1}\cdots\delta_{n\alpha_n}+C_1C_{\alpha_1}\delta_{2\alpha_2}\cdots\delta_{n\alpha_n}+\cdots+\delta_{1\alpha_1}\cdots\delta_{n-1\alpha_{n-1}}C_nC_{\alpha_n}\right)\,,$$
vale proprio
$$\epsilon^{1\cdots n}+\epsilon^{1\cdots n}C_1^2+\cdots+\epsilon^{1\cdots n}C_n^2=1+\sum_{\alpha=1}^{n}C_\alpha^2\,.$$
□

Nel caso in esame applicando, il lemma con
$$C_\alpha = i\frac{\Lambda^0{}_\alpha}{\Lambda^0{}_0}$$
si ottiene
$$\det g' = 1-\sum_\alpha\left(\frac{\Lambda^0{}_\alpha}{\Lambda^0{}_0}\right)^2 = 1-\frac{v^2_{\mathscr{F}|\mathscr{F}'}}{c^2}\,.$$
Concludiamo che vale la **formula di contrazione relativistica dei volumi**:
$$\mathrm{vol}(V') = \mathrm{vol}(V)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,, \tag{4.21}$$
dove $\mathrm{vol}(V)$ è valutato in quiete con l'insieme di punti materiali V, mentre $\mathrm{vol}(V')$ è il volume dello stesso insieme di punti materiali valutato in un riferimento inerziale in cui i punti materiali sono visti muoversi con la stessa velocità costante di modulo v.

4.3.2 Contrazione delle lunghezze.

Passiamo a considerare il caso in cui Ω sia un varietà unidimensionale, che indicheremo con, Γ, come per esempio un segmento, con misura (lunghezza) finita. Vogliamo ora confrontare le lunghezze $\ell(\Gamma)$ e $\ell(\Gamma')$.
Possiamo parametrizzare Γ come $[a,b]\ni u\mapsto\Gamma(u)$, cioè in coordinate x^α, $u\mapsto x^\alpha(u)$ e la sua lunghezza sarà data da
$$\ell(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{dx^\alpha}{du}\right)^2}\,du\,,$$
dove abbiamo usato il fatto che la metrica spaziale di $\mathscr{F}$ nelle coordinate dette è banalmente $g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$. Similmente se $g'_{\alpha\beta}$ data da (4.20)è la metrica spaziale di $\mathscr{F}'$ nelle coordinate $y^\alpha = x^\alpha$ si ha
$$\ell(\Gamma')=\int_a^b\sqrt{g'_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du}}\,du\,.$$

Sopra

$$g'_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du} = \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{dx^\alpha}{du}\right)^2 - \sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{\Lambda^\alpha{}_0}{\Lambda^0{}_0}\frac{dx^\beta}{du}\frac{\Lambda^\beta{}_0}{\Lambda^0{}_0}\,.$$

Questo può essere riscritto:

$$g'_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{du}\frac{dx^\beta}{du} = \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{dx^\alpha}{du}\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{dx^\alpha}{du}\frac{v^\alpha_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}}}{c}\right)^2\,.$$

e quindi

$$\ell(\Gamma') = \int_a^b \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{dx^\alpha}{du}\right)^2 - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{dx^\alpha}{du}\frac{v^\alpha_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}}}{c}\right)^2}\,du\,.$$

Nel caso la curva sia un segmento, lo possiamo sempre parametrizzare come

$$x^\alpha(u) = x^\alpha_0 + u\ell(\Gamma)n^\alpha\,,$$

dove $u \in [0,1]$ e n^α sono le componenti di un versore nello spazio di quiete considerato per $\mathscr{F}$. In tal caso otteniamo subito:

$$\ell(\Gamma') = \ell(\Gamma)\sqrt{1 - \frac{(n\cdot v)^2}{c^2}}\,, \tag{4.22}$$

dove $v := v_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}}$ e $\cdot$ indica il prodotto scalare associato alla metrica spaziale di $\mathscr{F}$. Ci sono due situazioni interessanti in cui la formula di sopra si applica:

(a) Γ è un segmento *perpendicolare a* $v_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}}$. In tal caso il secondo addendo sotto il segno di radice si annulla e troviamo

$$\ell(\Gamma') = \ell(\Gamma)\,.$$

(b) Γ è un segmento *parallelo a* $v_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}}$. In tal caso troviamo subito la **formula della contrazione relativistica delle lunghezze** o formula della **contrazione di Lorentz**

$$\ell(\Gamma') = \ell(\Gamma)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{4.23}$$

dove $\ell(\Gamma)$ è valutata in quiete con l'insieme di punti materiali formanti il segmento Γ, mentre $\ell(\Gamma')$ è la lunghezza dello stesso insieme di punti materiali valutato in un riferimento inerziale in cui i punti materiali sono visti muoversi con la stessa velocità costante di modulo v nella direzione stessa del segmento.

Nota 4.4. Ci si può chiedere se la contrazione di cui sopra si *veda* in senso proprio. Questa è una domanda complessa che implica nozioni di *ottica relativistica.* Diciamo solo che la cosa non è ovvia. Per esempio si può mostrare che una sorgente luminosa sferica in moto *non* viene vista contratta nella direzione del moto, ma si osserva una contrazione uniforme.

In ogni caso la contrazione di Lorentz è un fenomeno reale indipendentemente dal fatto di ciò che si osservi o meno. Per esempio, un'automobile di lunghezza L_0 misurata in quiete, può essere tutta contenuta per breve tempo in un garage di lunghezza $L_0/2$ con due porte (di entrata e di uscita lungo il moto dell'auto) che si chiudono e si riaprono contemporaneamente e molto velocemente, purchè la velocità dell'auto rispetto al garage sia tanto sostenuta che la contrazione di Lorentz ne riduca la lunghezza a $L' < L_0/2$.

Esercizi 4.2.

1. In riferimento all'osservazione di sopra, si supponga che la velocità costante dell'auto rispetto al garage sia tale che la lunghezza dell'auto nel riferimento del garage sia esattamente $L_0/2$. Si supponga che le porte del garage di spessore nullo si aprano e si chiudano contemporaneamente ed istantaneamente. Esattamente quando tutta l'auto si trova a passare nel garage, per un solo istante l'auto viene chiusa nel garage dalle due porte, che poi si riaprono lasciando l'auto uscire dal garage senza incidenti.
Si consideri ora la descrizione del fenomeno data dal guidatore dell'auto. Per lui il garage dovrà avere una lunghezza sicuramente inferiore a $L_0/2$ per la contrazione di Lorentz. Come è possibile, a giudizio del guidatore, che l'auto venga chiusa nel garage sia pure per un istante?

2. Nell'esperimento ideale di sopra si supponga che invece della seconda porta, a parità di tutte le altre condizioni, ci sia un muro impenetrabile e che l'auto sia fatta di materiale fragilissimo. Un osservatore in quiete con il garage vedrà la porta (l'unica rimasta) chiudersi dietro l'auto incolume un istante prima che essa si schianti contro il muro. Tenendo chiusa la porta, supposta impenetrabile, tutti i pezzi dell'auto rimangono nel garage. Per il guidatore invece ciò non può accadere essendo il garage troppo corto: la porta dovrebbe abbattersi per "tagliare" parte dell'auto prima che la punta si schianti contro il muro. Come mettere d'accordo i due punti di vista?

4.3.3 Deformazione degli angoli.

L'equazione (4.20) permette di confrontare anche le deformazioni cinematiche degli angoli. Consideriamo due sottovarietà Ω date da due segmenti $\Gamma_1 : u \mapsto O+un_1$ e $\Gamma_2 : u \mapsto O+un_2$, $u \in [0,1]$ uscenti dallo stesso punto O, con versori tangenti n_1 e n_2 e sia θ l'angolo (acuto) tra tali segmenti. Ovviamente $\cos\theta = \delta_{\alpha\beta} n_1^\alpha n_2^\beta$. Le corrispondenti sottovarietà Γ_1' e Γ_2', avranno vettori tangenti n_1' e n_2' formanti un angolo θ', che nelle coordinate y^1, y^2, y^3 hanno le stesse componenti n_1^α e η_2^β (ma non saranno più versori!). Avremo che, in virtù di (4.20) e con le stesse notazioni

$$|n_1'||n_2'| \cos\theta' = n_1 \cdot n_2 - \frac{(n_1 \cdot v)(n_2 \cdot v)}{c^2} \,.$$

I moduli $|n_1'|$, $|n_2'|$ non sono altro che le norme dei vettori calcolate con la metrica spaziale di $\mathscr{F}'$. La struttura affine identifica i moduli di tali vettori con le lunghezze di corrispondenti segmenti. Possiamo quindi usare (4.22) per valutare questi moduli ottenendo **la formula della**

deformazione relativistica degli angoli:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{(n_1\cdot v)(n_2\cdot v)}{c^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{(n_1\cdot v)^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{(n_2\cdot v)^2}{c^2}\right)}}\,, \tag{4.24}$$

dove, lo ricordiamo $v = v_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}}$.

Nota 4.5. In generale risulterà $\theta \neq \theta'$. Tuttavia ci sono alcuni casi notevoli in cui sussiste l'uguaglianza. (1) se n_1 e n_2 sono paralleli ($\cos\theta = \pm 1$), e quindi il concetto di parallelismo è invariante al variare del riferimento inerziale quando sussista nel riferimento di quiete con l'angolo. (2) oppure se ciascuno dei due vettori n_1, n_2 è o parallelo o ortogonale a $v_{\mathscr{F}'|\mathscr{F}}$. In particolare la condizione di ortogonalità *non è preservata* al variare del riferimento.

Capitolo 5

Dinamica in Relatività Speciale: covarianza delle leggi fisiche ed equazioni della dinamica.

Ci occuperemo ora della formulazione della dinamica nella teoria della relatività speciale. Avremo due principi guida. In realtà useremo diverse altre ipotesi ad hoc strada facendo. In ogni caso ci sono, come detto due grandi principi guida.
Uno è il principio di relatività:

RS3. Principio di Relatività. *Le leggi della fisica assumono la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale.*

In meccanica classica l'analogo principio ristretto alla meccanica veniva tradotto in termini matematici richiedendo l'invarianza della forma delle leggi della meccanica quando scritte in coordinate cartesiane solidali con ogni sistema di riferimento inerziale. Un modo (ma non l'unico) di esprimere il principio di relatività è quello di richiedere che le leggi fisiche siano descritte in termini di *tensori* (più in generale campi tensoriali). In tal modo, in componenti e rispetto a coordinate minkowskiane associate ad ogni riferimento inerziale, la forma delle leggi fisiche è preservata. Questo principio, che una versione più precisa di **RS3**, cade sotto il nome di **Principio di Covarianza**. Esso afferma che le leggi fisiche hanno forma invariante sotto l'azione del gruppo di Poincaré ortocrono[1]. Si osservi che esistono formulazioni equivalenti della relatività che non sono formulate in termini di tensori e che preservano la forma delle leggi fisiche al variare

[1]Più precisamente si è visto sperimentalmente negli anni '50 che il gruppo ortocrono contiene trasformazioni (inversioni di parità) che non lasciano invariata la forma delle leggi fisiche: le leggi fisiche sono in realtà invarianti sotto l'azione del sottogruppo di Poincaré *ortocrono proprio* che introdurremo più avanti. Esiste un teorema della teoria quantistica relativistica che afferma che oltre all'invarianza sotto l'azione del gruppo ortocrono proprio, sussiste anche l'invarianza sotto l'azione combinata di inversione del tempo T, inversione di parità P e *coniugazione di carica* C (operazione che consiste nello scambiare il segno di tutte le cariche elettriche). Tale teorema cade sotto il nome di *teorema PCT* (vedi per es [22]).

del riferimento inerziale, per esempio la *formulazione hamiltoniana.*

Il secondo pricipio di cui faremo uso è il

Principio di corrispondenza. *Le leggi della meccanica in relatività si devono ridurre a quelle della meccanica classica nel limite di piccole velocità.*

5.1 Nozione di massa, quadriforza e quadrimpulso per punti materiali.

In base al principio di corrispondenza sopra citato, la definizione della massa di un punto materiale può ancora essere data assumendo la validità della legge di conservazione dell'impulso totale di un sistema di punti materiali nel limite di velocità piccole rispetto a quelle della luce: le masse sono definite da rapporti di velocità una volta scelta la massa unitaria. Non è importante il valore di tali velocità che possono essere piccole a piacere purché non tutte nulle. Si osservi ancora che dal punto di vista fisico possiamo controllare le condizioni iniziali assumendo le velocità iniziali piccole a piacere, lavorando con intervalli di tempo sufficientemente piccoli tali velocità rimarranno piccole.

Nota 5.1. In realtà, con questo approccio ci sono dei problemi (già presenti classicamente) quando si tenta di definire la massa di una particella carica, in quanto è ben noto che le particelle cariche emettono onde elettromagnetiche nel momento in cui sono accelerate (anche se la velocità è nulla) e l'onda elettromagnetica sottrae impulso al sistema. Noi ignoreremo tale problema pensando di lavorare con particelle prive di carica.

Definizione 5.1. (**Punto materiale o particella**.) Un **punto materiale** o **particella** è dato tramite l'assegnazione di una linea di universo in $\mathbb{M}^4$, $\rho : (a, b) \ni u \mapsto \rho(u)$ di tipo tempo (futuro) detta **linea di universo del punto materiale** o **particella**, ed uno scalare $m > 0$ delle dimensioni di un massa detto **massa del punto materiale** o **particella**. $\diamondsuit$

Consideriamo dunque un punto materiale di linea di universo ρ di massa m e supponiamo che il punto sia sottoposto a qualche forma di interazione. Parametrizziamo la linea di universo del punto materiale con il tempo proprio τ: $\rho = \rho(\tau)$. Ci aspettiamo dal principio di corrispondenza che qualunque sia l'equazione della dinamica, lavorando nel riferimento di quiete istantanea $\mathscr{F}_\tau$ con la particella, ad un fissato valore del tempo proprio τ, essa assuma la forma

$$F^\alpha_\tau = m\frac{dv^\alpha}{dt} \, .$$

Sopra v^α sono le componenti della velocità del punto nel riferimento di quiete istantanea $\mathscr{F}_\tau$ e t è la coordinata temporale di tale riferimento. Il vettore F^α_τ dipenderà dall'ambiente con cui interagisce la particella. Nell'istante considerato possiamo identificare dt con $d\tau$:

$$F_\tau^\alpha = m\frac{dv^\alpha}{d\tau} .$$

Notiamo che abbiamo omesso la componente temporale, che in meccanica classica, e quindi nel riferimento di quiete istantanea, non gioca alcun ruolo nelle equazioni della dinamica. Nel riferimento di quiete istantanea, $V^\alpha = \gamma v^\alpha$, $\gamma = 1$ ed un semplice calcolo prova che

$$\frac{dv^\alpha}{d\tau} = \frac{dV^\alpha}{d\tau} ,$$

mentre

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = 0 .$$

Quindi l'equazione di sopra si riscrive, nel riferimento di quiete istantanea ed all'istante considerato:

$$F_\tau^i = m\frac{dV^i}{d\tau} .$$

dove abbiamo supposto che $F_\tau^0 = 0$. Descriviamo la stessa equazione di sopra in un altro sistema di riferimento in cui la velocità della particella non è nulla.

$$F^i := \Lambda^i_j F^j_\tau$$

dove Λ è la matrice di Lorentz che trasforma le coordinate del sistema di quiete nelle coordinate di un'altro arbitrario sistema di riferimento inerziale. Siamo naturalmente portati ad assumere che le equazioni della dinamica abbiano la forma, in ogni sistema di riferimento:

$$F^i = m\frac{dV^i}{d\tau} .$$

Affinché valga il determinismo, cioé esista un'unica soluzione una volta assegnate condizioni iniziali in termini dell'evento da cui esce la linea di universo e del vettore tangente di tale curva nell'evento considerato, assumeremo che F^i siano funzioni note dell'evento e del vettore tangente alla curva in tale evento. Abbiamo quindi:

$$F^i(\rho(\tau), V(\tau)) = m\frac{dV^i}{d\tau} , \tag{5.1}$$

Non possiamo dire che F^i individui un campo vettoriale su $\mathbb{M}^4$, dato che esso dipende anche dal vettore $V(\tau)$ che, in generale può scelto in diversi modi una volta che è stato fissato l'evento $\rho(\tau)$. Un modo naturale di pensare le componenti F^i è il seguente. Le componenti F^i possono essere viste come le *prime* 4 componenti di un campo vettoriale differenziabile sulla varietà $T\mathbb{M}^4$, le rimanenti 4 componenti avendo forma ovvia in modo da produrre il sistema di equazioni differenziali del prim'ordine su $T\mathbb{M}^4$:

$$\begin{cases} F^i(\rho(\tau), V(\tau)) & = m\frac{dV^i}{d\tau} , \\ mV^i & = m\frac{d\rho^i}{d\tau} . \end{cases} \tag{5.2}$$

Questo sistema di equazioni differenziali del prim'ordine è equivalente, ovviamente, al sistema di equazioni (5.1). Si osservi che ora l'esistenza e l'unicità della soluzione è assicurata, ma niente ci assicura che (a) la soluzione sia una curva di tipo tempo futuro e che (b) τ sia il tempo proprio (che equivale a dire $V^i V_i = -c^2$ ovunque sulla soluzione).
D'altra parte ci ricordiamo che rimane un vincolo da imporre sul vettore F: cioé che nel sistema di quiete della particella, la componente temporale si annulli. Tale vincolo può esprimersi con la richiesta

$$F^i(p,S)S_i = 0\,, \tag{5.3}$$

per ogni scelta di $(p,S) \in T\mathbb{M}^4$ tale che $S^iS_i = -c^2$ e S è diretto verso il futuro. Infatti (5.3) è una condizione che non dipende dalle coordinate minkowskiane usate e se espressa nel riferimento di quiete istantanea dice proprio che

$$F^0(\rho(\tau), V(\tau)) = 0\,.$$

Si osservi che in realtà la richiesta (5.3) è necessaria quando si assume, come facciamo noi, che la massa m della particella non dipenda dal tempo (proprio) e che la curva soluzione delle equazioni sia una linea di universo di tipo tempo. Infatti dall'equazione

$$V^iV_i = -c^2$$

segue subito che

$$V_i \frac{dV^i}{d\tau} = 0$$

da cui, segue subito la (5.3) se si assume (5.2) e tenuto conto che la quadrivelocità in ogni evento può essere scelta arbitrariamente rispettando $V^iV_i = -c^2$ e l'orientazione nel futuro. Il punto importante è che vale anche il viceversa:

Proposizione 5.1. *Si consideri un campo vettoriale differenziabile su $T\mathbb{M}^4$ definito da, in un sistema di coordinate globali naturali indotte da un sistema di coordinate minkowskiane su $\mathbb{M}^4$:*

$$F^k((p,S))\frac{\partial}{\partial x^k} + mS^k\frac{\partial}{\partial S^k}$$

con $m \neq 0$ che soddisfi il vincolo:

$$F^i((p,S))S_i = 0$$

per ogni $(p,S) \in T\mathbb{M}^4$ tale che $\boldsymbol{\eta}(S,S) = -c^2$ e $S \in \mathcal{I}^+_p$. Si considerino una curva integrale di tale campo, ossia $(a,b) \ni u \mapsto (\rho(u), S(u)) \in T\mathbb{M}^4$ soddisfacente

$$\begin{cases} F^i(\rho(u), S(u)) & = m\frac{dS^i}{du}\,, \\ mS^i & = m\frac{d\rho^i}{du}\,. \end{cases}$$

Se per $u = u_0 \in (a,b)$ vale $\boldsymbol{\eta}(S(u_0)|S(u_0)) = -c^2$ e $S(u_0) \in \mathcal{I}_p^+$ allora la curva è una linea di universo di tipo tempo, u è il tempo proprio e S la quadrivelocità. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Essendo $m \neq 0$, l'equazione del vincolo, su una soluzione del sistema di sopra implica immediatamente

$$\frac{d}{du}S^i(u)S_i(u) = 0\,.$$

Di conseguenza

$$S^i(u)S_i(u) = S^i(u_0)S_i(u_0) = -c^2\,.$$

Ulteriormente, se $\mathscr{F}$ è un riferimento inerziale, dato che $\partial_{\mathscr{F}}$ e S sono entrambi di tipo tempo la funzione $u \mapsto \boldsymbol{\eta}(\partial_{\mathscr{F}}|S(u))$ è non nulla per ogni $u \in (a,b)$ dalla proposizione 3.3. Il segno è quello fissato da $\boldsymbol{\eta}(\partial_{\mathscr{F}}|S(u_0))$. Tale segno è negativo perché $S(u_0)$ punta verso il futuro, ma allora per ogni $u \in (a,b)$, $S(u)$ punta verso il futuro. Concludiamo che $S(u)$ è parallelo e orientato temporalmente come la quadrivelocità $\partial_\tau = V$, avendo anche la stessa "lunghezza" ($S^i(u)S_i(u) = -c^2$) deve coincidere con V. Di conseguenza $u = \tau +$ costante. $\Box$

Possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 5.2. (**Quadri forza.**) L'assegnazione differenziabile di un vettore $F(p,S) \in T_p\mathbb{M}^4$ per ogni $p \in \mathbb{M}^4$ per ogni $S \in \mathcal{I}_p^+$ con $S^iS_i = -c^2$ è detta **quadriforza** se soddisfa il vincolo

$$F^i(p,S)S_i = 0$$

per ogni $p \in \mathbb{M}^4$ e $S \in \mathcal{I}_p^+$ con $S^iS_i = -c^2$. $\diamondsuit$

Possiamo quindi enunciare la prima delle leggi della dinamica relativistica per punti materiali sottoposti a forze esterne.

DRS1. *Le linee di universo delle particelle di massa m sono determinate risolvendo l'equazione*

$$F(\rho(\tau), V(\tau)) = m\frac{dV}{d\tau}\,,$$

dove il primo membro è la quadriforza agente sulla particella considerata.

Torna utile la seguente definizione che generalizza la nozione di impulso in meccanica classica.

Definizione 5.3. (**Quadri impulso.**) Data una particella con linea di universo $\rho = \rho(\tau)$, $\tau \in (a,b)$, e massa $m > 0$ il campo vettoriale tangente alla curva e diretto verso il futuro definito da

$$P := mV\,,$$

è detto **quadri impulso** associato alla particella. $\diamondsuit$

Commenti 5.1.
(1) Il quadri impulso soddisfa ovunque sulla linea di universo:

$$P^i P_i = -m^2 c^2 \,. \tag{5.4}$$

(2) Il quadri impulso può anche essere assegnato a particelle di massa nulla (tipicamente fotoni trattati per quanto possibile non quantisticamente) e lo schema dinamico precedentemente spiegato si estende a questa situazione con qualche accorgimento. È necessaria una regola, per il tipo di particella di massa nulla assegnato, che selezioni un vettore tangente (di tipo luce futuro) alla linea di universo della particella le cui componenti abbiano dimensioni di un impulso. Nel caso dei fotoni questo viene fatto in funzione della frequenza e del vettore d'onda dell'onda associata alla particella. Fissato un riferimento inerziale $\mathscr{F}$ e in esso un sistema di coordinate minkowskiane, rispetto a tali coordinate:

$$P^0 = \hbar\omega/c \;\text{ e } P^\alpha := \hbar k^\alpha \,,$$

dove ω è la frequenza dell'onda associata al fotone misurata nel riferimento $\mathscr{F}$, k^α sono le componenti spaziali del vettore d'onda e $\hbar = h/(2\pi)$ essendo $h = 6.626 \cdot 10^{-27} erg\, sec$ la costante di Planck. A causa delle relazioni ben note $\omega = c|k|$, risulta $P^i P_i = 0$.
Nel caso di massa nulla (5.4) diventa ovviamente:

$$P^i P_i = 0 \,. \tag{5.5}$$

L'estensione di **DRS1** al caso di particelle senza massa è molto più complesso e non ce ne occuperemo.
(3) Le componenti spaziali del quadri impulso, riferite a coordinate minkowskiane di un riferimento inerziale e per una particella con massa non nulla, sono

$$P^\alpha = m\gamma v^\alpha = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \,,$$

dove v è la velocità della particella nel riferimento considerato. Nel regime di piccole velocità (rispetto a quella della luce), le componenti spaziali di P si riducono alle componenti dell'impulso classico come ci si aspetta in conformità del principio di corrispondenza. Più complicato è il significato della componente temporale che studieremo sotto.
(4) Nelle vecchie trattazioni della relatività l'equazione di sopra si riscriveva

$$P^\alpha = m(v)v \,,$$

dove

$$m(v) := \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

era la cosiddetta *massa relativistica* che si contrapponeva alla *massa di quiete* m. Questa proliferazione dei concetti di massa, del tutto inutile e concettualmente deleteria a parere dell'autore, è caduta in disuso con gli anni.

5.1.1 Teorema "delle forze vive" relativistico.

Ci occupiamo ora di stabilire il significato fisico della componente temporale dell'equazione del moto (5.1) in un generico sistema di riferimento che non è in quiete (istantanea) con la particella e della componente temporale del quadrimpulso.
Il vincolo (5.3) in un sistema di coordinate suddetto si scrive esplicitamente

$$-c\gamma F^0 + \sum_\alpha F^\alpha V^\alpha = 0$$

ossia

$$cF^0 = \sum_\alpha F^\alpha v^\alpha \, .$$

Di conseguenza la componente temporale di (5.1) risulta essere scrivibile come

$$\sum_\alpha F^\alpha v^\alpha = \frac{d}{d\tau}\gamma mc^2 \, ,$$

Notiamo che

$$\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$$

e

$$\gamma(v/c) = 1 + v^2/(2c^2) + o((v/c)^4) \, .$$

Se trascuriamo nelle formule di sopra le potenze di v/c ad ordini superiori al secondo e poniamo $F \cdot v := \sum_\alpha F^\alpha v^\alpha$, si ritrova l'identità

$$F \cdot v = \frac{d}{dt}\left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) \, .$$

Questo è il *teorema delle forze vive* che afferma che la potenza uguaglia la derivata temporale dell'energia cinetica se si trascura il termine costante mc^2 che non fornisce comunque contributo al secondo membro per l'azione della derivata, e se si pensano le componenti spaziali della quadriforza F^α come componenti di una forza classica. Quindi la componente temporale dell'equazione (5.1) è una generalizzazione relativistica del teorema delle forze vive. Ulteriormente, se P^0 è la componente temporale del quadri impulso,

$$T := cP^0 - mc^2$$

si può pensare come la generalizzazione relativistica dell'energia cinetica della particella in quanto si riduce ad essa nel caso di velocità basse rispetto a c. Nello stesso modo cF^0 deve essere pensata come una generalizzazione della potenza al caso relativistico: si tratta dell'energia meccanica ceduta al punto materiale per unità di tempo proprio.
Mettiamo tutto insieme in una definizione che includa anche le definizioni di impulso e forza relativistica.

Definizione 5.4. (**Impulso, energia cinetica, forza e potenza relativistica.**) Data una particella con linea di universo $\rho = \rho(\tau)$, $\tau \in (a, b)$ e massa m e fissato un riferimento inerziale $\mathscr{F}$, l'**impulso** e l'**energia cinetica** (relativistici) della particella rispetto al riferimento $\mathscr{F}$ sono definiti rispettivamente come, per ogni evento su ρ,

$$p_{\mathscr{F}} := \overrightarrow{P}\,, \tag{5.6}$$

$$T_{\mathscr{F}} := cP^0 - mc^2 = -c\boldsymbol{\eta}(P|\partial_{\mathscr{F}}) - mc^2\,, \tag{5.7}$$

dove $P = \overrightarrow{P} + P^0\partial_{\mathscr{F}}$ è la decomposizione canonica indotta da $\mathscr{F}$ in ogni spazio tangente.
Se sulla particella agisce una quadriforza F, la **forza** e la **potenza** (relativistiche) rispetto al riferimento $\mathscr{F}$ agenti sulla particella sono definite rispettivamente come, per ogni evento su ρ

$$f_{\mathscr{F}} := \overrightarrow{F}\,, \tag{5.8}$$

$$\Pi_{\mathscr{F}} := cF^0 = -c\boldsymbol{\eta}(F|\partial_{\mathscr{F}})\,, \tag{5.9}$$

dove $F = \overrightarrow{F} + F^0\partial_{\mathscr{F}}$ è la decomposizione canonica indotta da $\mathscr{F}$ in ogni spazio tangente.$\diamondsuit$

Chiaramente la componente temporale dell'equazione (5.1) non è altro che il **teorema delle forze vive relativistico**:

Teorema 5.1. (**Teorema delle forze vive.**) *Si consideri un punto materiale soggetto ad una quadriforza F. In ogni riferimento inerziale $\mathscr{F}$ e per ogni istante di tempo proprio sulla linea di universo del punto materiale valgono le equazioni:*

$$f_{\mathscr{F}} \cdot v_{\mathscr{F}} = \Pi_{\mathscr{F}}\,, \tag{5.10}$$

$$\Pi_{\mathscr{F}} = \frac{d}{d\tau}(mc^2 + T_{\mathscr{F}})\,, \tag{5.11}$$

dove $\cdot$ indica il prodotto scalare negli spazi di quiete con $\mathscr{F}$ indotto dalla metrica spaziale di $\mathscr{F}$. $\diamondsuit$

Commenti 5.2.
(1) Una differenza con il teorema classico è che la derivata temporale è riferita al tempo proprio.
(2) Nel sistema di quiete istantanea, il teorema delle forze vive si riduce ad una banalità: $0 = 0$, perché la potenza dissipata in quel riferimento sul punto è nulla. Tra poco esamineremo un'estensione dei concetti definiti, di fondamentale importanza dal punto di vista fisico, in cui la situazione sarà completamente modificata.
(3) Nel caso di particella a massa nulla, semplicemente si definisce

$$T := cP^0\,.$$

(4) Un altro modo di scrivere la formula dell'energia cinetica è il seguente. Dato che vale $P_iP^i = -m^2c^2$, si ha:

$$cP^0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2\sum_{\alpha=1}^{3}(P^\alpha)^2}\,, \tag{5.12}$$

quindi

$$T = \sqrt{m^2c^4 + c^2\sum_{\alpha=1}^{3}(P^\alpha)^2} - mc^2 \,.$$

È facile provare che se $p := mv$ dove v è la velocità rispetto al riferimento considerato, risulta

$$T = \frac{p^2}{2m} + mc^2 O\left(\frac{|p|^4}{m^4c^4}\right) \,.$$

A meno di termini infinitesimi del quarto ordine ($p^2/2m$ è del secondo ordine), ritroviamo l'espressione classica dell'energia cinetica in termini dell'impulso. Nel caso di particelle a massa nulla semplicemente risulta

$$T = c\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}(P^\alpha)^2} \,,$$

Il limite a piccole velocità, o piccole componenti spaziali del quadri impulso, non è di molto interesse: le particelle senza massa hanno significato solo relativistico.

A titolo di esempio consideriamo la *forza di Lorentz elettromagnetica*. In fisica classica essa è descritta come segue. Si tratta della forza a cui è soggetta una particella di carica q, all'istante t, nella posizione $\vec{x}$ e con velocità $\vec{v}$, quando è immersa in un campo elettromagnetico descritto (in un riferimento inerziale) dal campo elettrico $\vec{E}(t,\vec{x})$ e dal campo magnetico $\vec{B}(t,\vec{x})$:

$$\vec{F}(t,\vec{x},\vec{v}) = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{B} \wedge \vec{v} \tag{5.13}$$

L'espressione di sopra è qualla usata in fisica classica che come vdremo ora coincide con quella relativistica per piccole velocità rispetto a c. In relatività il campo elettromagnetico è descritto da un campo tensoriale doppio antisimmetrico F_{ij} detto *tensore elettromagnetico*. In un riferimento inerziale, in coordinate Minkowskiane solidali con esso:

$$F^{ij} \equiv \frac{1}{c}\begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix} \,, \tag{5.14}$$

Con questa definizione la forza di Lorentz corrisponde alla *quadriforza di Lorentz*:

$$f^j(p,V) := qV_iF^{ij} \,. \tag{5.15}$$

Si osservi che il vincolo $f^i(p,V)V_i = 0$ è automaticamente soddisfatto per l'antisimmetria di F^{ij}. Infatti $f^i(p,V)V_i = qF^{ij}V_iV_j = 0$, dato che V_iV_j è simmetrico. Le componenti spaziali della quadrifirza di Lorentz si riducono all'espressione (5.13) per piccole velocità, valendo, per $\alpha = 1, 2, 3$ e dove $\vec{v}$ indica il vettore spaziale di componenti v^α:

$$f^\alpha = \frac{qE^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \wedge \vec{B}\right)^\alpha .$$

La componente temporale invece produce la potenza relativistica dissipata dal campo elettromagnetico. In compomenti relative alla scelta del riferimento, tale potenza è completamente dovuta alla parte elettrica del tensore elettromagnetico, la parte magnetica, come accade nel limite classico, non compie lavoro:

$$cf^0 = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{qE^\alpha v^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

5.2 Conservazione del quadri impulso e principio di equivalenza massa-energia.

Se un punto materiale è sottoposto ad una quadriforza nulla in un intervallo di tempo proprio, la linea di universo del punto materiale è un segmento di retta affine, cioè un moto rettilineo uniforme rispetto a qualche sistema di riferimento inerziale. Quello che più ci interessa è che il quadri impulso è conservato sulla linea di universo considerata. Quindi, rispetto ad un qualsiasi sistema di riferimento inerziale l'energia cinetica relativistica e l'impulso relativistico saranno costanti del tempo proprio e quindi della coordinata temporale del riferimento.

5.2.1 Legge di conservazione del quadri impulso.

Vogliamo ora cercare di formulare la *legge di conservazione del quadri impulso* che generalizza quella di conservazione dell'impulso e dell'energia per un *sistema di punti materiali* isolati all'esterno ma interagenti tra di essi. La formulazione più elementare di tale principio sembrerebbe consistere nella richiesta che il *quadri impulso totale* del sistema di punti materiali sia conservato nel tempo di ogni riferimento inerziale. Le cose non sono tanto semplici perché non è per nulla ovvio come definire il quadri impulso totale. Il passaggio dalla meccanica del punto a quella di un sistema di punti non è per nulla ovvia quanto lo era in meccanica classica. Ciò è dovuto al fatto che in generale *non* possiamo più banalmente definire delle *quantità totali*, come il quadri impulso totale o la quadriforza totale, sommando le rispettive quantità associate a singoli punti materiali. Vediamo perché. Prima di tutto dobbiamo decidere quali eventi considerare sulla linea di universo di ciascuna particella su cui leggere il quadri impulso per eseguire le somme dei vari quadri impulsi. Prendiamo a titolo di esempio il caso di due punti materiali isolati dall'esterno, ma che interagiscono tra di loro con interazioni "a distanza". Assumiamo che l'interazione a distanza sia tale che le loro linee di universo, quando i punti sono abbastanza "spazialmente vicini", smettono di essere dei segmenti e si incurvano, per poi diventare nuovamente segmenti quando i punti si sono sono sufficientemente "spazialmente allontanati". Cosa è il quadri impulso totale del sistema dei due punti? Dato che il quadri impulso totale in componenti sarà valutato da riferimenti, è naturale pensare che la procedura per definirlo sia quella di *sezionare* le due linee di universo ρ, ρ' con le sottovarietà $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ spazi di quiete di un riferimento inerziale $\mathscr{F}$. Il *quadri impulso totale al tempo t* dovrebbe essere definito come $P_t + P'_t$ dove tali quadri impulsi sono quelli valutati in $\Sigma_{\mathscr{F}t} \cap \rho$ e $\Sigma_{\mathscr{F}t} \cap \rho'$ rispettivamente. Il principio di conservazione del quadri impulso dovrebbe quindi consistere nella richiesta che $P_t + P'_t$ non dipenda da t.

Nota 5.2. Questa procedura di definire il quadri impulso totale e quindi enunciare la legge di conservazione del quadri impulso per sistemi di punti materiali isolati all'esterno non è comunque una buona procedura per due motivi importanti.
(a) Con la definizione data, il principio di conservazione dell'impulso relativistico in ogni riferimento inerziale, che segue immediatamente dal principio di conservazione del quadri impulso, sarebbe equivalente al principio di azione e reazione. Tuttavia, in assenza del tempo assoluto e se le forze si esercitano a distanza, il principio di azione e reazione può solo essere formulato separatamente in ogni sistema di riferimento inerziale rispetto alla coordinata temporale di tale riferimento. Tuttavia è facile produrre esempi semplici in cui la validità del principio di azione e reazione in un riferimento inerziale implica che tale principio *non valga* in un altro sistema di riferimento inerziale. Concludendo, con la procedura indicata per dare le definizioni ed enunciare il principio, avremmo che *la validità del principio di conservazione del quadri impulso totale dovrebbe dipendere dal riferimento inerziale in netto contrasto con il principio di relatività.*
(b) Un secondo motivo per rigettare le definizioni e l'enunciazione proposta del principio di conservazione del quadri impulso totale è il seguente. Il quadri impulso totale definito come detto dipenderà in generale dal riferimento a differenza dei quadri impulsi dei singoli punti materiali del sistema che contribuiscono a definirlo. Per provare ciò consideriamo ancora il sistema dei due punti materiali di sopra. Si fissi un evento p sulla linea di universo ρ, nella regione di spaziotempo Ω in cui avviene l'interazione per cui cui le due linee non sono segmenti in Ω. Tenendo fisso p scegliamo due spazi di quiete Σ_1, Σ_2 riferiti rispettivamente a due diversi riferimenti inerziali $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ e assumiamo che entrambi gli spazi intersechino la prima linea in p. È chiaro che i due spazi di quiete intersecheranno l'altra linea di universo ρ' in due eventi diversi q_1 in $\Sigma_1 \cap \rho'$ e q_2 in $\Sigma_2 \cap \rho'$ e $q_1 \neq q_2$. In q_1 e q_2, in generale, i quadri impulsi del secondo punto materiale P'_1 e P'_2 saranno differenti perché la linea di universo ρ' non è un segmento (a causa dell'interazione) e non ha quindi vettore tangente costante. Di conseguenza la procedura suggerita sopra fornisce due quadri impulsi totali $P_p + P'_1$ e $P_p + P'_2$ in generale diversi, indipendentemente dal fatto che essi si conservino o meno al variare del tempo del corrispondente riferimento.

Torneremo successivamente sui problemi sollevati nelle precedenti osservazioni. Passiamo a considerare la situazione particolare, ma fisicamente interessante in cui le interazioni tra particelle sono puntuali ed istantanee, cioé avvengono in eventi isolati. In tal caso non ci sono problemi con il principio di azione e reazione. In altre parole considereremo sistemi di punti materiali le cui linee di universo sono segmenti di rette affini (o semirette) di $\mathbb{M}^4$ di tipo causale futuro e confluiscono o escono da singoli eventi.

DRS2 (**Principio di conservazione del quadri impulso per interazioni puntuali ed istantanee**) *Per un sistema di punti materiali le cui mutue intrazioni sono concentrate in eventi isolati (e non ci sono altre interazioni con sistemi esterni), le lenee di universo dei punti del sistema formano un grafo i cui archi sono segmenti causali futuro orientati e i vertici sono gli eventi in cui avvengono le intrazioni. Su tale grafo valgono i seguenti fatti:*

(i) su ogni arco il quadri impulso è costante,

(ii) la somma dei quadri impulsi degli archi che entrano dal passato in un vertice è uguale alla somma dei quadri impulsi degli archi che escono nel futuro da tale verticie.

Con questo postulato si può dare una definizione invariante e costante nell'evoluzione temporale del **quadri impulso totale**, almeno nel caso in cui il numero di vertici ed archi è finito. Fissato un sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$ e un suo spazio di quiete $\Sigma_t^{(\mathscr{F})}$, il quadri impulso totale totale è la somma $P = \sum_{i=1}^N P_i$ dei quadri impulsi sulle linee di universo che tagliano lo spazio di quiete detto. Non è del tutto evidente ma si riesce a provare che, in virtù di **DRS2** tale somma non dipende dal sistema di riferimento e dallo spazio di quiete scelto, anche se il numero N può dipendere da entramabi. Si osservi che tale definizione si può dare solo perché stiamo lavorando in uno spazio affine e possiamo sommare vettori applicati in punti diversi dello spaziotempo. In relatività generale, dove lo spaziotempo non è uno spazio affine, questa procedura non avrebbe senso. $\diamondsuit$

Esercizi 5.1.

1. Provare che, anche se la massa non è conservata (come discuteremo meglio tra poco), non è comunque possible creare particelle dal nullla.

Suggerimento. Il quadri momento totale finale è sicuramente di tipo causale e diretto vrso il futur, quindi $P^0 > 0$ che viola la conservazione del quadri impulso.

5.2.2 Il principio di equivalenza massa energia.

Il principio di conservazione del quadri impulso, anche nella sua forma elementare enunciata sopra, ha delle conseguenze importantissime per quanto riguarda la relazione tra massa ed energia.

Per illustrare tali conseguenze, consideriamo preventivamente la seguente situazione. Si consideri un sistema di punti materiali (di massa non nulla) non interagenti tra di essi e isolati con l'esterno, con quadri impulsi $P_{(i)}$ e masse $m_{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$. È possibile trattare, matematicamente, il sistema complessivo come un unico punto associando ad esso un unico quadri impulso ed una unica massa. Dato che $P := \sum_i P_{(i)}$ è di tipo tempo futuro essendo tali i $P_{(i)}$ ed essendo un cono ogni $\mathfrak{I}_q^+$, per la proposizione 2.3, ci sarà un unico riferimento inerziale $\mathscr{F}_G$ con $\partial_{\mathscr{F}_G}$ parallelo a P. Tale riferimento è detto **baricentrale**. In tale riferimento solo la componente temporale di P è non nulla e vale:

$$M := \frac{P^0}{c} = \sum_{i=1}^N m_{(i)} + \sum_{i=1}^N \frac{T_{\mathscr{F}(i)}}{c^2} .$$

Se dunque vogliamo dare senso al concetto di *massa totale* del sistema per questa via, dobbiamo definirla come la somma delle masse delle particelle componenti *con l'aggiunta delle energie cinetiche delle stesse particelle valutate nel riferimento baricentrale.* In tal modo si vede che *le energie cinetiche danno sorprendentemente un contributo alla massa complessiva del sistema.* Si può obiettare che in realtà il discorso è del tutto formale e che in realtà non esiste alcun punto materiale associato al sistema complessivo. Questo è vero, ma la situazione cambia radicalmente con il seguente esempio dove le formule matematiche sono simili ma il significato fisico è profondamente diverso. Consideriamo un processo di *decadimento* di particelle comunemente osservato in fisica delle particelle. Una particella di massa M e quadri impulso P, istantaneamente e puntualmente decade in due particelle di masse m_1, m_2 e quadri impulsi P_1, P_2. Prima e dopo il decadimento le particelle sono libere. Classicamente il fenomeno è possibile solo se

$$M = m_1 + m_2 \ ,$$

per la legge di addizione delle masse. Ulteriormente, sempre nel caso classico, l'energia cinetica delle particelle finali se non è nulla è creata a spese di qualche forma di *energia interna* della particella iniziale (per esempio energia chimica negli esplosivi). Relativisticamente ci sono altre possibilità. Se ci poniamo nel sistema baricentrale delle due particelle finali, in tale riferimento la particella iniziale di massa M è vista in quiete (fino a quando esiste) e gli impulsi delle due particelle finali sono uguali ed opposti. La conservazione del quadri impulso in tale riferimento ha come unica equazione non banale quella data dalla componente temporale:

$$M = m_1 + m_2 + \frac{T_{(1)}}{c^2} + \frac{T_{(2)}}{c^2} \ .$$

Questa equazione dice che la massa complessiva delle due particelle finali può *essere inferiore* alla massa della particella iniziale, e la differenza di massa si trasforma in energia cinetica delle particelle finali secondo la celeberrima equazione di Einstein

$$E = mc^2 \ ,$$

dove in questo casso $E = T_{(1)} + T_{(2)}$ è un'energia cinetica e $m = M - m_1 - m_2$ è la differenza delle masse.

Deve essere precisato che non solo l'enunciato teorico del principio di conservazione del quadri impulso ammette tali fenomeni in linea di principio, ma *sperimentalmente* si osservano effettivamente fenomeni come quello suddetto in cui

$$m_1 + m_2 < M \ .$$

In tali casi la differenza di massa è davvero "tramutata" in energia cinetica secondo l'equazione di Einstein.

È fondamentale notare che l'energia cinetica non è l'unica forma di energia nota, ma ne esistono di diverso tipo: meccanica, chimica, termodinamica, ecc. Tali forme di energia si possono trasformare l'una nell'altra in conformità con la legge generale di conservazione dell'energia. È allora naturale formulare il:

Principio di equivalenza massa energia. *Il contenuto complessivo energetico di un corpo, valutato in quiete con esso, corrisponde alla massa dello stesso corpo tramite l'equazione:* $E = mc^2$.

Tale principio, unito al principio di conservazione dell'energia, ha ricevuto e riceve continuamente nella fisica delle alte energie molteplici conferme sperimentali ed è oggi accettato come *vero*.

Commenti 5.3.
(1) Come conseguenza della conservazione dell'energia e del principio di equivalenza massa energia, *la massa cessa di essere una grandezza additiva e conservata.* Ulteriormente *sono possibili "trasmutazioni" di massa in diverse forme di energia"* (nel rispetto dell'equazione di Einstein).
(2) Consideriamo il processo inverso di quello studiato sopra, in cui due punti materiali macroscopici, per esempio due palline di plastilina, si scontrano nel riferimento baricentrale e danno luogo ad un unico punto materiale fermo, con massa

$$M = m_1 + m_2 + \frac{T_{(1)}}{c^2} + \frac{T_{(2)}}{c^2} ,$$

dove abbiamo usato la stessa notazione di sopra. Osserviamo che a causa del valore enorme di c^2, la differenza $M - (m_1 + m_2)$ risulta essere molto piccola nelle scale usuali di energie e masse. Infatti dal punto di vista classico tale differenza è considerata nulla. Dal punto di vista classico si afferma anche che l'energia cinetica $T_{(1)} + T_{(2)}$ viene immagazzinata sotto forma di *energia interna* nella particella di massa M finale: in quest'ottica il punto finale è in realtà un sistema termodinamico. A conferma di tale fatto, in conformità con le proprietà generali dell'energia interna termodinamica, si assiste sperimentalmente ad un aumento della temperatura della particella finale rispetto alla temperatura delle due particelle iniziali (supposte con la stessa temperatura). Un modo naturale di fare coesistere i due punti di vista è quello di affermare che la massa M finale definisce il contenuto complessivo di energia della particella nel suo riferimento di quiete: l'energia interna termodinamica è inclusa nel calcolo di Mc^2. In altre parole, se scaldiamo un sistema termodinamico, quindi cedendogli energia non meccanica (senza variazioni di energia cinetica), la massa del sistema deve aumentare di Q/c^2 dove Q è la quantità complessiva di energia non meccanica (calore) ceduta al sistema.
Da questo punto di vista si può generalizzare la legge **DRS1** definendo quadri forze non meccaniche ed assumendo *variabile la massa del punto materiale* soggetto alla quadriforza. Assumiamo ancora valida

$$F = \frac{dP}{d\tau} ,$$

ma omettiamo il vincolo

$$\boldsymbol{\eta}(F|P) = 0$$

nella definizione di quadriforza. Lo scalare $\boldsymbol{\eta}(F|P)$ valutato in un evento della linea di universo del punto materiale risulta avere il valore

$$\boldsymbol{\eta}(F|P) = -m(\tau)cF_\tau^0$$

dove il secondo membro è riferito al sistema di riferimento istantaneamente in quiete con il punto materiale. Quindi

$$\mathcal{Q} := -m^{-1}\boldsymbol{\eta}(F|P) = cF_\tau^0$$

misura *l'energia non meccanica ceduta al punto materiale nel suo sistema di quiete istantanea e per unità di tempo proprio.* Dalla condizione

$$\boldsymbol{\eta}(P|P) = -m^2c^2$$

si ricava subito che vale:

$$\mathcal{Q} = \frac{d}{d\tau}m(\tau)c^2\,. \tag{5.16}$$

È immediato verificare che la stessa equazione si trova scrivendo la componente temporale dell'equazione della dinamica nel riferimento di quiete istantanea della particella.
Si osservi che l'assenza del vincolo $\boldsymbol{\eta}(F|P) = 0$ impone un'equazione di più sul moto della particella: la componente temporale dell'equazione della dinamica nel sistema di quiete della particella non è più banale, ma diventa l'equazione (5.16). Tuttavia, ora anche $m = m(\tau)$ è una variabile del problema per cui il problema del moto risulta comunque essere determinato.
Per concludere, notiamo che nel caso di quadriforze completamente meccaniche, il vincolo (5.3) comporta immediatamente la costanza della massa della particella attraverso la stessa (5.16).

Esercizi 5.2.

1. Può una particella di massa M diminuire la sua massa ed aumentare la sua energia cinetica spontaneamente in modo istantaneo e puntuale?
Suggerimento: si esamini la conservazione del quadri impulso nel riferimento di quiete con la particella prima della trasformazione.

2. Un fotone può trasformarsi spontaneamente, istantaneamente e puntualmente in due particelle di massa non nulla?
Suggerimento: si esamini la conservazione del quadri impulso nel riferimento baricentrale della coppia di particella dopo la trasformazione.

3. Si consideri una quadriforza non totalmente meccanica F, la si decomponga in *parte meccanica* e *parte non meccanica* come

$$F = F_m + F_{nm}$$

dove

$$F_{nm} := -\frac{\boldsymbol{\eta}(P|F)P}{m^2c^2}\,.$$

Mostrare che il teorema delle forze vive ora assume la forma

$$f_{\mathscr{F}m} \cdot v_{\mathscr{F}} + \mathcal{Q} = \frac{d}{d\tau}(mc^2 + T_{\mathscr{F}}) \,,$$

dove la forza relativistica $f_{\mathscr{F}m}$ è riferita alla sola parte meccanica della quadriforza.
Concludere che vale anche la forma completamente meccanica del teorema delle forze vive:

$$f_{\mathscr{F}m} \cdot v_{\mathscr{F}} = \frac{d}{d\tau} T_{\mathscr{F}} \,.$$

Suggerimento: Esplicitare la componente temporale della legge della dinamica in un arbitrario riferimento $\mathscr{F}$, quindi notare che per costruzione $\boldsymbol{\eta}(F_m|P) = 0$ e scrivere tale equazione come una relazione tra F_m^0 e $f_{\mathscr{F}m} \cdot v_{\mathscr{F}}$. L'ultima relazione da provare segue dalla prima relazione da provare e da (5.16).

4. Nei processi di fusione nucleare, due nuclei si fondono per dare luogo a un unico nucleo finale. La massa del nucleo finale è inferiore alla somma delle masse dei due nuclei iniziali: si ha cioè un *difetto di massa*. Cercare di spiegare in termini semiclassici, tenendo conto che lo stato finale si può considerare come uno *stato legato*, perché tale difetto di massa appare. Dove è finita la massa che manca?
Suggerimento: L'energia meccanica del sistema finale si può pensare come data dai contributi delle due masse più l'energia meccanica del sistema (potenziale + cinetica). Per liberare i due nuclei dallo stato legato bisogna compiere del lavoro positivo sul sistema per cui l'energia meccanica è negativa.

5.3 Il tensore energia-impulso.

Eccettuata la situazione in cui i punti materiali di un sistema non interagiscano oppure interagiscano con interazioni puntuali (cioè non "a distanza") ed istantanee, i problemi posti nella nota 5.2 della sezione 5.2.1 sono effettivi e *non* si risolvono. In realtà c'è un motivo profondamente fisico che andiamo ad illustrare. Già in elettrodinamica classica in cui le forze non sono a distanza, il tentativo classico di definire l'impulso totale di un insieme di cariche come la somma degli impulsi delle cariche, generalmente in moto, fallisce miseramente perché non include un contributo essenziale: l'impulso del campo elettromagnetico e senza di esso l'impulso totale del sistema non si conserva. Il fallimento del principio di azione e reazione nell'elettrodinamica, a causa della velocià finita con cui si propagano le perturbazioni del campo elettromagnetico costringe ad attribuire al campo elettromagnetico un contributo all'impulso totale del sistema se si vuole mantenere valido il principio di conservazione dell'impulso. La stessa cosa accade per l'energia. In relatività, non esistono velocità di propagazione di alcunché che possa definire relazioni causali nello spaziotempo, a causa della struttura causale dello stesso. In particolare quindi, non solo sarà necessario attribuire un quadri impulso al campo elettromagnetico ma a qualsiasi campo che descrive interazioni "a distanza" tra particelle. Quello che di fatto accade, è che ad ogni campo che descrive interazioni viene associato un campo tensoriale doppio simmetrico detto *tensore energia-impulso*. Fissato un riferimento inerziale ed un suo spazio di quiete,

il tensore energia impulso definisce una densità di quadri impulso su tale spazio di quiete che deve essere integrata spazialmente per dare luogo al quadri impulso del campo valutato in quel riferimento ed all'istante considerato. Il quadri impulso totale, definito dalla somma dei quadri impulsi dei punti e del quadri impulso del campo, gode di due proprietà che risolvono i problemi sollevati nella nota 5.2: (1) esso *non* dipende dal riferimento inerziale usato per eseguire la somma, (2) esso *non* dipende dal tempo del riferimento che etichetta lo spazio di quiete: cioè è conservato.
Lo sforzo di impostare la teoria in termini di densità, definite puntualmente è anche importante in prospettiva per un secondo fine. Quando si passa dalla relatività speciale alla relatività generale, cessa di esistere la struttura di spazio affine che permette di sommare vettori applicati in punti distinti dello spaziotempo, come abbiamo fatto precedentemente per definire la nozione di quadrimpulso complessivo di un insieme di punti materiali non interagenti o interagenti in singoli eventi. Una descrizione in termini di densità, da integrare su opportune ipersuperfici tridimensionali di tipo spazio può ancora avere senso. In tale contesto le densità devono essere rappresentate, punto per punto, da opportuni campi tensoriali.

5.3.1 Teorema della divergenza in forma covariante.

Abbiamo bisogno di qualche strumento tecnico per introdurre il tensore energia-impulso.
Se $(M, \mathbf{g})$ è una varietà (pseudo-)riemanniana, la metrica $\mathbf{g}$ indice una misura naturale di volume μ_g (sulla classe dei sottoinsiemi di Borel di M) che, in ogni carta locale definita su M, cioè $\psi : U \ni p \mapsto (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$, assume l'espressione

$$\mu_g(E) = \int_{\psi(E)} \sqrt{|g(x^1, \ldots, x^n)|} dx^1 \cdots dx^n \ ,$$

dove $E \subset U \subset M$ è un insieme di Borel, $dx^1 \cdots dx^n$ denota la solita misura di Lebesgue in coordinate, cioè definita in $\psi(U) \subset \mathbb{R}^n$ e $g(x^1, \ldots, x^n)$ indica il *determinante* della matrice che, nelle coordinate considerate, individua il tensore metrico $\mathbf{g}$. La definizione di un integrale sulle funzioni (a supporto compatto) definite su M, sfruttando la *paracompattezza* di M, si ottiene in modo standard con una *partizione dell'unità* $\{f_i\}_{i\in I}$ *subordinata* ad un atlante *localmente finito*. Si tratta di un atlante $\{(U_i, \psi_i)\}_{i\in I}$ tale che ogni $p \in M$ ammette un intorno aperto O_p che interseca un numero finito di domini U_i. L'insieme $\{f_i\}_{i\in I}$ è una classe di funzioni continue a supporto compatto $f_i : M \to [0, 1]$ tali che $\sum_{i\in I} f_i(p) = 1$ per ogni $p \in M$ e con $supp f_i \subset U_i$ per ogni $i \in I$; la somma è sempre eseguita su un insieme finito di indici per la proprietà degli intorni O_p suddetta.
Se $F : M \to \mathbb{R}$ è continua a supporto compatto si definisce, in riferimento ad una partizione dell'unità come sopra:

$$\int_M F d\mu_{\mathbf{g}} := \sum_{i\in I} \int_{U_i} (F \circ \psi_i)(f_i \circ \psi_i) \sqrt{|g_i(x_i^1, \ldots, x_i^n)|} dx_i^1 \cdots dx_i^n \ . \tag{5.17}$$

Dato che il supporto di F è compatto, dal ricoprimento di insiemi aperti O_p suddetto, possiamo estrarre un sottoricoprimento finito $\{P_{p_i}\}_{i=1,\ldots,N}$, dove gli N punti p_i appartengono a $suppF$.

Ognuno di tali intorni interseca un numero finito di supporti delle funzioni f_i. In definitiva, dato che $U_{i=1}^{N} O_{p_i} \supset suppF$, solo un numero finito di supporti delle funzioni f_i della partizione dell'unità intersecheranno il supporto di F. Di conseguenza la somma a secondo membro della (5.17) è finita perché di fatto è eseguita su un numero finito di termini.
Si dimostra (abbastanza facilmente) che il funzionale lineare sulle funzioni continue a supporto compatto, definito in questo modo dal secondo membro della (5.17) non dipende dall'atlante e dalla partizione dell'unità. Dato che il funzionale definito sopra è positivo, il *teorema della rappresentazione di Riesz* assicura che esista un'unica misura positiva σ-additiva di Borel regolare, indicata appunto con $\mu_{\mathbf{g}}$, che assegna ai compatti misura finita e il cui integrale coincida con il funzionale definito sopra quando ci si restringe a lavorare con funzioni continue a supporto compatto.

Se $S \subset M$ è una sottovarietà tridimensionale embedded e $\mathbf{h}$ è la metrica indotta[2] da $\mathbf{g}$ su S, viene a definirsi una misura naturale di volume $\nu_{\mathbf{h}}$ considerando $(S, \mathbf{h})$ come varietà (pseudo-)riemanniana, nel caso in cui la metrica indotta $\mathbf{h}$ sia una vera (pseudo-)metrica, cioè sia non degenere. In caso contrario il determinante h si annulla e la costruzione è problematica.
Si può dimostrare che il teorema di Stokes-Poincaré dato in termini di forme differenziali, assume la seguente espressione facendo uso della *connessione di Levi-Civita*, o *derivata covariante di Levi-Civita*, ∇ associata alla metrica $\mathbf{g}$ della varietà $(M, \mathbf{g})$. Nello spazio di Minkowski $(\mathbb{M}^4, \boldsymbol{\eta})$, ∇ si riduce al solito gradiente in componenti se si lavora in coordinate minkowskiane, tuttavia quanto diremo vale nel caso di una varietà *lorentziana* generica, cioé una varietà pseudo Riemanniana di dimensione 4 in cui la metrica $\mathbf{g}$ ha segnatura $-, +, +, +$.

Teorema 5.2. *Sia* $(M, \mathbf{g})$ *una varietà lorentziana di dimensione* 4*,* X *un campo vettoriale smooth su* M *e* $N \subset M$ *un sottoinsieme aperto chiusura compatta la cui frontiera* ∂M *sia orientabile e sia l'unione disgiunta di un numero finito di sottovarietà embedded di dimensione* 3*, ciascuna separatamente di tipo spazio oppure tempo, e di un numero finito di sottovarietà embedded di dimensione* 2*. In questo caso:*

$$\int_N \nabla \cdot X d\mu_{\mathbf{g}} = \oint_{+\partial N} \langle X, n \rangle d\nu_{\mathbf{h}} \,. \tag{5.18}$$

L'integrale a secondo membro è da intendersi come la somma degli integrali sulle sottovarietà tridimensionali di cui ∂N *è composta e* n *è il covettore normale uscente a* ∂N *normalizzato a* $\mathbf{g}(n|n) = \pm 1$ *a seconda del caso, infine* $\nabla \cdot X$ *indica la divergenza calcolata rispetto alla connessione di Levi-Civita:* $\nabla \cdot X = \nabla_a X^a$ *in ogni sistema di coordinate locali.*

Nel teorema precedente, il covettore n normale a ∂N in $p \in \partial N$ è detto **uscente** dal volume N se esiste un sistema di coordinate locali x^1, x^2, x^3, x^4 in un intorno di p adattato a ∂N, cioé x^2, x^3, x^4 sono coordinate locali ammissibili su ∂N per $x^1 = x^1(p)$, tale che $n = cdx^1|_p$ con $c > 0$ e la curva $u \mapsto (x^1(p)+u, x^2(p), x^3(p), x^4(p))$ non interseca N per $u > 0$ sufficientemente piccolo.

[2]Se X, Y sono tangenti a S nel punto $p \in S$, $\mathbf{h}_p(X, Y) := \mathbf{g}_p(X, Y)$.

Supponiamo che il campo X sia di tipo tempo nello spaziotempo di Minkowski $\mathbb{M}^4$ e soddisfi la condizione:

$$\nabla \cdot X = 0 \tag{5.19}$$

ovunque. Consideriamo un "tubo" T di linee integrali di X limitato da due sottovarietà embedded S_1 e S_2 tridimensionali di tipo spazio – per esempio due spazi di quiete $\Sigma_{\mathscr{F}t_1}, \Sigma_{\mathscr{F}t_2}$ a tempi diversi, $t_2 > t_1$, di un sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$ – dato che $\langle X, n\rangle = 0$ sulla superficie laterale del tubo (che risulta essere di tipo tempo), l'equazione (5.18) per il cilindro N ottenuto racchiudendo la porzione di T tra S_1 e S_2 fornisce l'identità

$$0 = \oint_{+\partial N} \langle X, n\rangle d\nu_{\mathbf{h}} \,. \tag{5.20}$$

Teniamo ora conto che le pareti laterali del cilindro non forniscono alcun contributo, dato che risulta $\langle X, n\rangle = 0$ su di esse per costruzione. Possiamo allora riscrivere l'identità trovata come:

$$\int_{S_2\cap T} \langle X, n\rangle d\nu_{\mathbf{h}} = \int_{S_1\cap T} \langle X, n\rangle d\nu_{\mathbf{h}} \,, \tag{5.21}$$

dove i due versori n sono ora diretti uno in direzione entrante e l'altro in direzione uscente (per esempio entrambi verso il futuro, pensando il tutto in $\mathbb{M}^4$) e non in direzione uscente da dalla porzione di tubo di flusso che stiamo considerando. Questa scelta spiega l'assenza del segno $-$ a secondo membro.
Si osservi che in (5.21), nel caso generale non è richiesto che S_1 e S_2 siano normali a X.

La (5.21) si presta ad un'interpretazione fisica interessante: *si tratta di un equazione di conservazione, nel tempo, della grandezza ottenuta integrando la densità* $\langle X, n\rangle$. In componenti, se pensiamo il tutto in $\mathbb{M}^4$ ed immaginiamo che S_1 e S_2 siano due spazi di quiete $\Sigma_{\mathscr{F}t_1}, \Sigma_{\mathscr{F}t_2}$ a tempi diversi, $t_2 > t_1$, di un sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$ con coordinate minkowskiane x^0, x^1, x^2, x^3, risulta subito che $n = dx^0$, quando la coordinata x^0 cresce verso il futuro. Si osservi che di conseguenza la forma controvariante di n vale $-\partial_{x^0}$ e si ha anche $\langle X, n\rangle = X^0$.
Tuttavia si possono anche considerare spazi di quiete di *due distinti* sistemi di riferimento inerziali. La (5.21) implica allora *anche* che valori delle grandezze ottenute integrando la densità $\langle X, n\rangle$ non dipendano dal riferimento.

Nota 5.3.
(1) Il fatto di usare una versione del teorema di Stokes-Poincaré (5.18) che tiri in causa esplicitamente la struttura metrica dello spaziotempo invece di lavorare con forme differenziali è, da una parte scomodo, dato che non è possibile trattare adeguatamente il caso in cui ∂N includa porzioni estese di tipo luce su cui la misura indotta dalla metrica è degenere. D'altra parte, tale formulazione si presta ad interpretazioni fisiche importanti, dato che entra in gioco esplicitamente la *connessione di Levi-Civita* che ha un importante significato fisico, specialmente in Relatività Generale, e che la misura spaziale è fissata una volta per tutte dalla metrica, cioè fisicamente parlando, dagli strumenti di misura a disposizione in ogni sistema di riferimento,

indipendenti dalla densità che di deve integrare.
(2) Si può provare facilmente che, per X smooth di tipo tempo, la richiesta (5.21), assunta valida per *ogni* scelta del tubo T di linee integrali e delle sottovarietà spaziali S_1, S_2, è in realtà *equivalente* alla richiesta $\nabla \cdot X = 0$. Proviamolo. Assumiamo che valga (5.21) e quindi (5.20) in modo del tutto generale. Se in un punto $p \in M$ fosse $\nabla \cdot X \neq 0$ allora, in un intorno O di tale punto, per continuità, dovrebbe risultare $|\nabla \cdot X| > c$ per qualche costante $c > 0$. Scegliendo un cilindro $N \subset O$ costruito con un tubo di linee integrali di X e due sottovarietà di tipo spazio S_1, S_2 come detto sopra (è sufficiente lavorare in una carta locale restringendo O attorno a p se necessario), si arriverebbe ad ottenere $\int_N \nabla \cdot X d\mu_{\mathbf{g}} \neq 0$ (dato che la misura degli aperti non vuoti è strettamente positiva per la misura $\mu_{\mathbf{g}}$) che in virtù della (5.18) renderebbe impossibile la (5.20).
(3) L'interpretazione data della (5.21) come legge di conservazione per la grandezza $\langle X, n\rangle$ *prescinde completamente dal fatto di lavorare in relatività speciale e può essere data in uno spaziotempo del tutto generale.*

5.3.2 Il tensore energia impulso per il fluido di materia non interagente.

Partendo dalle considerazioni della sezione precedente, consideriamo il caso di un sistema esteso più semplice possibile: una polvere di particelle, ciascuna con una massa assegnata, che non interagiscono e che evolvono con linee di universo tangenti ad un *campo di quadrivelocità* V. Tale campo è assunto essere smooth, definito in una qualche regione aperta T dello spaziotempo di Minkowski di "forma tubolare", in modo tale che prese due sottovarietà embedded tridimensionali di tipo spazio date da spazi di quiete di due riferimenti (non necessariamente lo stesso), la porzione di T che cade tra di esse sia a chiusura compatta.
Si osservi che la non interazione tra le particelle implica che esse descrivano moti rettilinei uniformi in ogni sistema di riferimento inerziale; in altre parole le loro storie sono segmenti di retta quando parametrizzate con il tempo proprio. Conseguentemente soddisfano l'equazione $\nabla_V V = 0$. Come vedremo più avanti, questa equazione ha ancora senso in uno spaziotempo generico della Relatività Generale e definisce particolari storie di particelle (se V è di tipo tempo futuro) dette geodetiche (di tipo tempo futuro) e caratterizza il moto inerziale in modo completamente generale.
Il sistema che stiamo descrivendo non è altro che la versione "continua" dell'insieme discreto di punti materiali non interagenti considerato precedentemente. Possiamo associare a tale sistema una densità di massa μ_0 pensata come una funzione smooth nella regione di spaziotempo che consideriamo. Qui si apre un problema: se parliamo di *densità di massa* significa che la *massa* si deve ottenere integrando tale densità nello spazio (tridimensionale) rispetto alla misura $\nu_{\mathbf{h}}$. A quale riferimento inerziale ci stiamo riferendo per definire lo spazio di quiete? Una risposta sensata è quella di considerare un sistema di riferimento differente per ogni evento p dello spaziotempo attraversato da una linea integrale di V. La densità di massa $\mu_0(p)$ in p sarà riferita allo spazio del sistema di riferimento inerziale con $\mathscr{F} = V(p)$. In altre parole, ci stiamo riferendo al sistema di riferimento inerziale in quiete con la particella la cui storia passa per p. Quale sarà la densità di massa in un qualsiasi altro sistema di riferimento? Ragionando in via del

tutto euristica, se Δ_0 rappresenta un “piccolo volume spaziale” nel riferimento associato a $V(p)$ attorno a p, in un qualunque altro sistema di riferimento $\mathscr{F}$, Δ_0 corrisponderà ad un “piccolo volume spaziale” attorno a p:

$$\Delta_{\mathscr{F}} = \Delta_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

dove v è la velocità della particella considerata nel riferimento $\mathscr{F}$, come abbiamo visto nella sezione 4.3.1. La stessa relazione può essere scritta:

$$\mu_{\mathscr{F}} = \frac{\mu_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

dove $\mu_{\mathscr{F}}$ è la densità di massa vista nel riferimento $\mathscr{F}$, tenuto conto del fatto che la massa è uno scalare per cui $\Delta_{\mathscr{F}}\mu_{\mathscr{F}} = \Delta_0\mu_0$. Abbiamo ottenuto che $\mu_{\mathscr{F}} = \mu_0 V^0$, ovvero

$$\mu_{\mathscr{F}} = \frac{\mu_0}{c}\langle V, n_{\mathscr{F}}\rangle \tag{5.22}$$

dove $n_{\mathscr{F}}$ è il covettore normale agli spazi di quiete di $\mathscr{F}$ e diretto verso il futuro.
Dobbiamo infine imporre un vincolo sulla densità μ_0 che corrisponde all'idea che: *la massa contenuta in una porzione di continuo che evolve secondo le curve integrali di V rimanga costante nel tempo.* In altre parole stiamo pensando che la massa non sia altro che la somma delle masse “infinitesime” associate ad ogni storia V e che ciascuna massa non vari nel tempo, perché i punti non interagiscono; conseguentemente inseguendo una porzione di continuo associato ad un insieme di punti materiali, la massa di tale porzione deve rimanere sempre la stessa, dato che i punti materiali che la compongono sono sempre gli stessi.
Il vincolo detto si esprime come

$$\int_{\Sigma_{\mathscr{F},t_2}\cap T'} \langle \mu_0 V, n\rangle d\nu_{\mathbf{h}} = \int_{\Sigma_{\mathscr{F},t_2}\cap T'} \langle \mu_0 V, n\rangle d\nu_{\mathbf{h}}\,, \tag{5.23}$$

dove $T' \subset T$ è una qualsiasi sotto regione tubolare ottenuta selezionando un sottoinsieme aperto in $\Sigma_{\mathscr{F},t_2}$ e facendolo evolvere secondo V. Il risultato deve essere valido comunque scegliamo il sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$. Per quanto detto in (3) nella nota 5.3, la richiesta fatta è equivalente alla richiesta espressa in forma locale:

$$\nabla\cdot(\mu_0 V) = 0\,, \tag{5.24}$$

che assumeremo essere valida d'ora in poi, per ogni punto di T.
Consideriamo ora la *densità di quadri impulso* del sistema di punti. Nel riferimento $\mathscr{F}$, dato che $\mu_{\mathscr{F}}$ è la densità di massa, essa sarà descritta da:

$$\mu_{\mathscr{F}} V = \frac{\mu_0}{c} V\langle V, n_{\mathscr{F}}\rangle\,.$$

Integrando questa grandezza, rispetto alla misura spaziale $d\nu_{\mathbf{h}}$, sullo spazio di quiete $\Sigma_{\mathscr{F},t}$ del riferimento $\mathscr{F}$ otteniamo infatti l'impulso totale del sistema *calcolato nel riferimento* $\mathscr{F}$*, al* *tempo t di tale riferimento*: non facciamo altro che sommare (attraverso un integrale) tutti i contributi mV dovuti a ciascun punto materiale la cui storia attraversa $\sigma_{\mathscr{F},t}$ al tempo t. Tutto ciò ci porta a definire il campo tensoriale controvariante, detto **tensore energia impulso** del sistema:

$$T := \mu_0 V \otimes V \,. \tag{5.25}$$

Nel seguito indicheremo con $T(\omega)$ il campo vettoriale che si ottiene contraendo il fattore V di sinistra con il campo vettoriale covariante ω. In componenti:

$$T(\omega)^k := \omega_i T^{ik} \quad \text{per ogni campo vettoriale covariante } \omega.$$

In base a quanto detto sopra, dato un sistema di riferimento $\mathscr{F}$ con associate coordinate minkowskiane x^0, x^1, x^2, x^3, l'impulso totale nel riferimento $\mathscr{F}$ nella direzione ∂_{x^i} e nell'evento p è data da:

$$P^i_{\mathscr{F}t} = \frac{1}{c}\int_{\Sigma_{\mathscr{F}t}} \langle T(dx^i), n\rangle d\mu_{\mathbf{h}} \,, \tag{5.26}$$

mentre la densità di energia è data da:

$$E_{\mathscr{F}t} = \int_{\Sigma_{\mathscr{F}t}} \langle T(dx^0), n\rangle d\mu_{\mathbf{h}} \,. \tag{5.27}$$

Vogliamo ora mostrare che, in virtù del fatto che le particelle del nostro continuo sono non interagenti e pertanto le loro linee di universo sono geodetiche, le grandezze $P^i_{\mathscr{F}t}$ e $E_{\mathscr{F}t}$ sono costanti al variare del tempo, cioè sono *conservate*. Ulteriormente vedremo anche che le quattro grandezze dette sono le componenti di un quadrivettore, che dunque *non dipende* dalla scelta del riferimento inerziale $\mathscr{F}$.

Teorema 5.3. *Il campo tensoriale energia impulso T in (5.25), nell'ipotesi che il campo di velocità V sia quello di particelle in moto geodetico e che valga l'equazione di conservazione della massa (5.24) soddisfa l'equazione:*

$$\nabla_b T^{ab} = 0 \,. \tag{5.28}$$

Conseguentemente:

(a) *per ogni fissato sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$, le quattro grandezze $E_{\mathscr{F}t}/c$, $P^i_{\mathscr{F}t}$, definite in (5.27) e (5.26), sono costanti nel tempo;*

(b) *al variare del riferimento $\mathscr{F}$, tali grandezze costituiscono le componenti di un quadrivettore P indipendente dalla scelta di $\mathscr{F}$.*

Dimostrazione. Vale $\nabla_b T^{ab} = \nabla_b(\mu_0 V^a V^b) = \nabla_b(\mu_0 V^b)V^a + \mu_0 V^b \nabla_b V^a$. Entrambi gli addendi finali sono nulli, il primo per la (5.24) ed il secondo perché vale l'equazione delle geodetiche $V^b\nabla_b V^a = 0$ per ogni linea di universo delle particelle.
Fissato un riferimento $\mathscr{F}$ con coordinate minkowskiane x^0, x^1, x^2, x^3, dato che il campi dx^a sono campi costanti (rispetto alla connessione di Levi-Civita), abbiamo che, se $\omega = c_a dx^a$ con c_a costanti arbitrarie: $\nabla \cdot T(\omega) = \nabla_b(c_a T^{ab}) = c_a \nabla_b T^{ab} = 0$. Usando il teorema 5.2 con $X = T(\omega)$

segue immediatamente la conservazione delle quattro grandezze $E_{\mathscr{F}t}/c$, $P^i_{\mathscr{F}t}$ comunque si scelga il sistema di riferimento. Per provare (b), consideriamo un covettore ω costante rispetto alla connessione di Levi-Civita e due sistemi di riferimento inerziali $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$. Fissiamo $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ e $\Sigma_{\mathscr{F}'t'}$ in modo tale che le loro intersezioni con T non abbiano punti in comune ed individuino una regione N limitata nel passato e nel futuro rispettivamente da $\Sigma_{\mathscr{F}t}$ e $\Sigma_{\mathscr{F}'t'}$. Applicando nuovamente il teorema 5.2 alla regione N si ottiene che

$$\int_{\Sigma_{\mathscr{F}',t'}\cap T} \langle T(\omega), n'\rangle d\nu_{\mathbf{h}'} = \int_{\Sigma_{\mathscr{F},t}\cap T} \langle T(\omega), n\rangle d\nu_{\mathbf{h}} \,.$$

che si può scrivere, se $\omega = \omega_i dx^1 = \omega'_k dx'^k$

$$E_{\mathscr{F}'t'}\omega'_0 + \sum_{k=1}^{3} cP^k_{\mathscr{F}'t'}\omega'_k = E_{\mathscr{F}t}\omega_0 + \sum_{i=1}^{3} cP^i_{\mathscr{F}t}\omega_i \,.$$

Questo significa che i due membri definiscono lo *stesso* funzionale lineare $\omega \mapsto \langle P, \omega\rangle$ sullo spazio dei covettori costanti ω, cioè sullo spazio duale allo spazio delle traslazioni dello spazio affine $\mathbb{M}^4$. In altre parole definiscono un elemento dello spazio delle traslazioni stesso, cioè un vettore controvariante: P che ha componenti $c^{-1}E_{\mathscr{F}'t'}, P^1_{\mathscr{F}'t'}, P^2_{\mathscr{F}'t'}, P^3_{\mathscr{F}'t'}$ nella base pseudo-ortonormale associata alle coordinate minkowskiane di $\mathscr{F}'$ e componenti $c^{-1}E_{\mathscr{F}t}, P^1_{\mathscr{F}t}, P^2_{\mathscr{F}t}, P^3_{\mathscr{F}t}$ nella base pseudo-ortonormale associata alle coordinate minkowskiane di $\mathscr{F}$. $\Box$

Nota 5.4. In via del tutto generale, se un campo tensoriale doppio controvariante T soddisfa l'equazione (5.28) e se ω è un campo vettoriale covariante *costante*, cioè ha componenti costanti in coordinate Minkowskiane nello spazio di Minkowski:

$$\nabla\omega = 0 \,, \tag{5.29}$$

allora, come si verifica immediatamente, il campo vettoriale:

$$X^b := \omega_a T^{ab} \,, \tag{5.30}$$

soddisfa l'equazione (5.19) e pertanto vale l'equazione di conservazione (5.21), che permette di definire grandezze conservate.
In realtà, dato che $T^{ab} = T^{ba}$, al fine di ottenere X^b suddetto conservato, la condizione (5.29) può essere indebolita in

$$\nabla_a\omega_b + \nabla_b\omega_a = 0 \,. \tag{5.31}$$

La condizione (5.31) ha un significato importante in Relatività Generale quando la struttura affine è assente e la metrica cessa di essere rappresentata da componenti costanti in qualunque siistema di coordinate locali. Tale condizione è detta *condizione di Killing*. Si tratta di una condizione che individua campi vettoriali (il corrispondente controvariante di ω) tangenti alle curve integrali di gruppi locali ad un parametro di isometrie. $\diamondsuit$

Esercizi 5.3.

1. Assumendo $T^{ab} = \mu_0 V^a V^b$ con V ovunque timelike e diretto verso il futuro e $\mu_0 \geq 0$, si provi che la legge di conservazione della massa in forma locale $\nabla_a(\mu_0 V^a) = 0$ e l'equazione del moto geodetico $V^a \nabla_a V^b = 0$ (dove $\mu_0 \neq 0$) sono a loro volta *conseguenze* di $\nabla_a T^{ab} = 0$.

Soluzione. $V_b \nabla_a T^{ab} = 0$ si sviluppa in $0 = V^b(\nabla_a V^b)\mu_0 V^a + V^b V_b \nabla_a(\mu_0 V^a)$, dove $V^b(\nabla_a V^b) = \nabla_a(V^b V_a)/2 = -\nabla_a c^2 = 0$ e quindi rimane $-c^2 \nabla_a(\mu_0 V^a) = 0$ che è l'equazione di conservazione della massa. Tenendo conto di ciò e sviluppando $\nabla_a(\mu_0 V^a V^b) = 0$, si trova $\mu_0 V^a \nabla_a V^b = 0$. Abbiamo provato che vale anche l'equazione del moto geodetico $\nabla_a V^b = 0$ dove $\mu_0 \neq 0$.

2. Provare che, assumendo T^{ab} della forma dell'esercizio precedente, allora l'identità

$$\nabla_a T^{ab} = f^b ,$$

dove $V_b f^b = 0$, si può intepretare come l'equazione del moto per le particelle di continuo sotto l'azione della densità di quadriforza meccanica f, e tale densità è valutata nel riferimento di quiete con ciascuna particlella:

$$\mu_0 \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^b}{d\tau}\right) = f^b , \tag{5.32}$$

sopra $x^b = x^b(\tau)$ e la linea di universo di una particella di continuo in coordinate Minkoskiane. Si provi anche che continua a valere l'equazione di conservazione della massa $\nabla_a(\mu_0 V^a) = 0$e anche che μ_0 è costante lungo le dette linee di universo.

Soluzione. L'equazione $V_b \nabla_a T^{ab} = V_b f^b = 0$ si sviluppa in $0 = V_b(\nabla_a V^b)\mu_0 V^a + V^b V_b \nabla_a(\mu_0 V^a)$ dove $V_b(\nabla_a V^b) = \nabla_a(V^b V_b)/2 = -\nabla_a c^2 = 0$ e quindi rimane $-c^2\nabla_a(\mu_0 V^a) = 0$, in modo tale che l'equazione di conservazione della massa è ancora valida. Usando quasto risultato in $\nabla_a T^{ab} = f^b$ otteniamo $\mu_0 V^a \nabla_a V^b = f^b$. Per concludere usando coordinate minkowskiane per descrivere le linne di universo suddette l'equazione $\mu_0 V^a \nabla_a V^b = f^b$ ottenuta sopra si può riscrivere $\mu_0 \frac{d^2 x^b}{d\tau^2} = f^b$.

3. Provare che la (5.32) ha il significato euristico dell'equazione del moto di una porzione "infinitesima" di continuo in accordo con **DRS1**.

Soluzione. Eq. (5.32) Consideriamo una piccola porzione di continuo di massa δm riferita al volume δv_0 in quiete con tale porzione in modo tale che $\mu_0 = \frac{\delta m}{\delta v_0}$. Inserendo questa identità in (5.32) troviamo

$$\delta\mu \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^b}{d\tau}\right) = f^b \delta v_0 ,$$

che significa, dato che la massa della porzione di continuo non cambia nella sua evoluzione,

$$\frac{d}{d\tau}\delta P^b = f^b \delta v_0 , \quad \text{dove} \quad \delta P^b = \delta\mu \frac{dx^b}{d\tau} ,$$

e questa equazione non è altro che **DRS1** per la porzione considerata. Possiamo anche riscrivere l'equazione passando dal tempo proprio al tempo globale t del sistema di riferimento $\mathscr{F}$

$$\frac{d}{dt}\delta P^b = f^b \frac{\delta v_0}{V^0} \,.$$

Dato che la porzione di continuo ha volume $\delta v = \frac{\delta v_0}{V^0}$ quando ci riferiamo allo spazio di quiete con il riferimento $\mathscr{F}$, l'equazione scritta diventa:

$$\frac{d}{dt}\delta P^b = f^b \delta v \,.$$

5.3.3 Il tensore energia impulso nel caso generale

L'equazione di conservazione (5.28) è molto interessante dal punto di vista fisico: è espressa in forma completamente locale e quindi non necessita della struttura di spazio affine per sussistere e pertanto si può imporre anche in ambienti in cui la struttura di spazio affine non può esistere: lo spaziotempo della relatività generale. Ulteriormente è espressa in termini di operazioni tra tensori e pertanto si esprime, in componenti, nello stesso modo in ogni sistema di riferimento inerziale, rispettando "a vista" il principio di relatività. Si può supporre che la (5.28) sia il modo in cui il principio di conservazione energia-impulso si debba esprimere nelle teorie relativistiche, *anche quando il sistema interagisca.* In effetti le cose stanno davvero in tal modo: ad ogni sistema fisico trattato in relatività speciale (includendo i sistemi di campi come il campo elettromagnetico) si riesce sempre ad associare un tensore energia-impulso che, nel caso in cui il sistema sia isolato (ma possa auto interagire), integrato sugli spazi di quiete dei riferimenti inerziali, definisce l'energia e l'impulso complessivi del sistema in tali riferimenti e che soddisfa l'equazione (5.28) che garantisce la conservazione di tali quantità ed il fatto che diano luogo ad un unico quadrivettore energia impulso del sistema, indipendentemente dal riferimento.

La procedura più diretta per definire il tensore energia impulso per un sistema fisico passa per la formulazione lagrangiana e attraverso la formulazione del teorema di Noether esteso al caso di sistemi continui (tipicamente campi).

Rimanendo fuori dalla formulazione lagrangiana, vogliamo ora illustrare come l'esistenza del tensore energia-impulso sia fortemente compatibile e suggerito dalla meccanica dei continui classica. Le due equazioni fondamentali dei continui dalla meccanica classica sono le seguenti, valide in coordinate cartesiane ortonormali x^1, x^2, x^3 di un qualsiasi sistema di riferimento inerziale, dove t è il tempo assoluto ed assumendo che il continuo evolva sia tramite auto interazione che forze esterne:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \mu v^\beta = 0 \tag{5.33}$$

$$\mu \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{3} v^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} v^\alpha \right) = \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \sigma^{\alpha\beta} + f^\alpha \,, \quad \alpha = 1,2,3 \,. \tag{5.34}$$

Sopra v^α è la componente generica del campo di velocità del continuo, μ la densità di massa e σ indica il **tensore degli sforzi di Cauchy** del continuo: si tratta di un campo tensoriale dipendente anche dal tempo, tale che, se V è una porzione di continuo nello spazio di quiete del riferimento al tempo t, con bordo regolare orientabile ∂V, allora, se $P \in \partial V$ vale:

$$s^\alpha(t,P) = \sum_{\beta=1}^{3} \sigma^{\alpha\beta}(t,P) n_\beta(t,P) \, ,$$

dove $s^\alpha(t,P)$ è la densità superficiale di forza, detta anche **sforzo** o **stress**, che la porzione esterna di continuo esercita in P quando il covettore normale uscente a ∂V in P è $n(t,P)$. Il tensore degli sforzi è una proprietà del continuo considerato ed è in generale, legato con leggi costitutive alla deformazione del continuo oppure ad altre sue proprietà (per esempio, alle variazioni del campo di velocità nel caso dei fluidi). f^α indica infine la densita volumetrica di forza dovuta a qualche sistema esterno al continuo.

L'equazione (5.33) esprime la *legge di conservazione della massa* in regime non relativistico, attraverso un'equazione di continuità. La (5.34) corrisponde invece alla *seconda legge della dinamica* per ogni particella di continuo. Si può dimostrare che la conservazione classica del momento della quantità di moto impone al tensore degli sforzi l'ulteriore richiesta di simmetria:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta\alpha} \, . \tag{5.35}$$

Tenendo conto del fatto che:

$$\mu \frac{\partial v^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mu v^\alpha - v^\alpha \frac{\partial \mu}{\partial t}$$

ed esprimendo la $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ in termini di derivate spaziali usando la (5.33) ed inserendo il risultato nella (5.34), il set di equazioni (5.33)-(5.34) si riscrive del tutto equivalentemente come:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \mu v^\beta = 0 \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu v^\alpha + \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\mu v^\alpha v^\beta - \sigma^{\alpha\beta} \right) = 0 \, , \quad \alpha = 1,2,3 \, . \tag{5.37}$$

Assumeremo ora che il nostro continuo ammetta una descrizione relativistica ed in particolare ammetta un tensore energia impulso T che soddisfi la diretta generalizzazione della (5.28) ottenuta aggiungendo una densità di quadri forza esterna (vedi 2 in Esercizi 5.3)

$$\nabla_a T^{ab} = f^b \, , \tag{5.38}$$

e tale che $\frac{1}{c^2} T^{00}$ e $\frac{1}{c} T^{0\beta}$ rappresentino la densità di massa e la densità di impulso. In tal caso la (5.38) si può interpretare come una diretta generalizzazione del set di equazioni (5.33)-(5.34) a grandi velocità. Fissando un sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$ e riferendosi a coordinate minkowskiane $x^0 = ct$, x^1, x^2, x^3 associate ad esso, la (5.28) si esplicita in:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}T^{00} + \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{c}T^{0\beta} = \frac{1}{c}f^0 \tag{5.39}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c}T^{\alpha 0} + \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta} = f^\alpha\,, \quad \alpha = 1,2,3\,. \tag{5.40}$$

Se ammettiamo che, in regimi di piccole velocità (rispetto a c), T^{00}/c^2 e $T^{0\beta}/c$ abbiano la stessa forma classica: $T^{00}/c^2 \simeq \mu$ e $T^{0\beta}/c \simeq T^{\beta 0}/c \simeq \mu v^\beta$ e supponiamo trascurabile $\frac{1}{c}f^0$, la prima delle due equazioni scritte sopra diventa l'equazione di conservazione della massa (5.39). La seconda diventa la (5.34) pur di identificare $T^{\alpha\beta}$ con $\mu v^\alpha v^\beta - \sigma^{\alpha\beta}$ in regime di piccole velocità. In particolare esattamente nel sistema di quiete con una particella di continuo risulta:

$$T^{\alpha\beta} = -\sigma^{\alpha\beta} \quad \text{nel riferimento di quiete del continuo.}$$

Dato che $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta\alpha}$ abbiamo che, almeno nel limite classico, $T^{ab} = T^{ba}$. In ogni caso questa identità varrà in quiete istantanea con le particelle del continuo e dato che la simmetria di un tensore non dipende dalla scelta delle coordinate ci aspettiamo che il tensore energia impulso sia sempre simmetrico.

Nota 5.5. Nel caso del fluido di particelle non interagenti vale $\sigma^{\alpha\beta} = 0$, ed infatti risulta $T^{\alpha\beta} = \mu_0 V^\alpha V^\beta = 0$ se $\alpha, \beta = 1,2,3$ nel riferimento di quiete con una particella di continuo, dato che in tale riferimento V ha solo componente temporale. $\diamondsuit$

La discussione di sopra suggerisce fortemente che la nozione di tensore energia impulso sia veramente una nozione naturale e promettente per descrivere il contenuto energetico e di impulso di un sistema continuo. Ci si può aspettare che tale nozione sia utile anche per quei sistemi estesi che non corrispondono a continui nel senso classico, come per esempio i campi (eventualmente quantistici), come il campo elettromagnetico. In questo caso il limite classico di (5.36)-(5.37) non ha senso. Possiamo comunque dare un'intepretazione generale delle componenti di T^{ab} rispetto ad un sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$ che prescinde dal limite classico di sopra:

(i) $T^{00}_{\mathscr{F}}$ è la densità spaziale di energia nel sistema di riferimento $\Sigma_t^{(\mathscr{F})}$,

(ii) $cT^{\beta 0}_{\mathscr{F}}$ è la componente β del flusso interno di energia nel sistema di riferimento $\Sigma_t^{(\mathscr{F})}$,

(iii) $\frac{1}{c}T^{\alpha 0}_{\mathscr{F}}$ è la densità spaziale di impulso nella direzione x^α nel sistema di riferimento $\Sigma_t^{(\mathscr{F})}$,

(iv) $T^{\alpha\beta}_{\mathscr{F}}$ è la componente β del flusso interno della quantità di moto nella direzione x^β nel sistema di riferimento $\Sigma_t^{(\mathscr{F})}$ (si note che include un contributo dovuto agli stress interni nel caso di un continuo classico).

L'interpretazione di sopra è conseguenza della seguente rappresentazione geometrica dell'equazione $\nabla_a T^{ab} = 0$ nello spazio di quiete di $\mathscr{F}$. Fissiamo una regione spaziale limitata B (un aperto a chiusura compatta) nello spazio di quiete di $\mathscr{F}$ il cui bordo sia orientabile e regolare. Lavorando nelle coordinate $x^0 = ct, x^1, x^2, x^3$ solidali con $\mathscr{F}$, integriamo l'equazione suddetta su B:

$$\int_B \nabla_0 T^{0a} dx^1 dx^2 dx^3 = -\sum_{\alpha=1}^{3} \int_B \nabla_\alpha T^{\alpha a} dx^1 dx^2 dx^3 \,.$$

Dato che $\overline{B}$ è compatto, se assumiamo che gli integrandi siano funzioni continue in tutte le coordinate, possiamo estrarre a sinistra la derivata temporale e usare il teorema della divergenza nel membro di destra. Otteniamo in questo modo:

$$\frac{d}{dt} \int_B \frac{1}{c} T^{0a} dx^1 dx^2 dx^3 = -\oint_{+\partial B} \sum_{\alpha=1}^{3} T^{\alpha a} n_\alpha d\nu \,,$$

dove n_α indica la componente α del vettore normale uscente a ∂B. è ora evidente che la variazione per unità di tempo della quantità totale nel volume B (energia o momento spaziale a meno di costanti moltiplicative) coincide con il flusso della corrispondente quantità che passa attraverso il bordo di B. Tutto ciò giustifica le intepretazione date sopra. Se aggiungessimo una densità di quadriforza semplicemente aggiungeremmo delle *sorgenti esterne* di energia o momento lasciando immutato il significato delle equazioni di bilancio scritte.

Nel caso in cui si trattino due sistemi fisici in interazione, ciascuno dotato del suo tensore energia impulso T e T', ci si aspetta che il tensore energia impulso del sistema complessivo sia dato dalla somma dei due tensori energia impulso più un eventualmente un terzo tensore che tiene conto dell'interazione dei due sistemi: $T + T' + T_{int}$. Dal punto di vista fisico ci si aspetta che se il sistema complessivo è isolato e i due sistemi interagiscano allora, separatamente, T, T' e T_{int} non soddisfino la (5.28), ma tale equazione è comunque soddisfatta dalla somma dei tre tensori energia impulso. Equivalentemente le densità di quadriforza che agiscono sul primo e sul secondo sistema saranno

$$f^b = -\nabla_a (T'^{ab} + T^{ab}_{int}) \quad \text{and} \quad f'^b = -\nabla_a (T^{ab} + T^{ab}_{int}) \,.$$

Si osservi che $f^b \neq -f'^b$ e meno che $\nabla_a T^{ab}_{int} = 0$ (come accade in 6 in Esercizi 5.4 sotto).

5.3.4 Il tensore energia impulso del fluido perfetto.

In meccanica dei continui classica, l'esempio più semplice di fluido auto interagente è il cosiddetto **fluido perfetto**, caratterizzato dal fatto che il suo tensore degli sforzi abbia struttura completamente isotropa, in coordinate cartesiane ortonormali dello spazio di quiete di un riferimento inerziale:

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} \tag{5.41}$$

dove $p \geq 0$ è la **pressione** del fluido (all'istante e nel punto considerato). La pressione è legata alle altre proprietà del fluido, in particolare la densità di massa μ ed il campo di velocità v,

attraverso una qualche relazione costitutiva dipendente dal tipo di fluido.
Per costruire la generalizzazione relativistica di un tale sistema fisico, osserviamo che in base alla discussione di sopra, nel riferimento inerziale di quiete istantanea con una particella di fluido, ci si aspetta che valga:

$$(T_0)^{\alpha\beta} = p\delta^{\alpha\beta}\,, \quad (T_0)^{00} = c^2\mu_0\,,$$

dove μ_0 è la densità di massa valutata nel sistema di quiete (istantanea) con la particella di continuo considerata. In un riferimento inerziale generico, in cui le linee di universo delle particelle di fluido hanno componenti V^a dovrà essere

$$T^{ab} = (\Lambda_p)^a{}_c(\Lambda_p)^a{}_d(T_0)^{cd}\,,$$

dove la matrice di Lorentz Λ_p è data dalla (7.29) (dove $\overrightarrow{V}$ è il vettore colonna delle 3 componenti spaziali della quadrivelocità V e $c\gamma$ è la componente temporale):

$$\Lambda_p = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & \overrightarrow{V}^t/c \\ \hline \overrightarrow{V}/c & I + \overrightarrow{V}\overrightarrow{V}^t/[c^2(1+\gamma)] \end{array}\right]\,,$$

ed è tale che trasformi il vettore colonna di componenti $(c,0,0,0)^t \in \mathbb{R}^4$ nel vettore colonna le cui componenti sono quelle del quadrivettore V. Il calcolo diretto mostra che:

$$T^{ab} = \mu_0 V^a V^b + p\left(g^{ab} + \frac{V^a V^b}{c^2}\right)\,. \tag{5.42}$$

Questo tensore energia impulso viene detto **tensore energia impulso relativistico del fluido perfetto**. Nella (5.42), μ_0 è la densità di massa misurata in quiete con le particelle di fluido mentre V è il campo di quadrivelocità di tali particelle.

Nota 5.6. Il modello (5.42) di tensore energia impulso è usato anche in Relatività Generale ed in regimi relativistici molto spinti: per trattare la cosmologia. In tal caso le particelle sono le galassie (o gli ammassi galattici) che riempiono l'universo. In tali contesti, il vincolo classico $p \geq 0$ cessa di essere, in generale valido e sono ammesse *pressioni negative*.

Esercizi 5.4.
1. Provare che se valgolno $\nabla_a T^{ab} = 0$ e $T^{ab} = T^{ba}$, definendo

$$M^{ab}_{\mathscr{F}}(t) := \frac{1}{c}\int_{\Sigma^{(\mathscr{F})}_t} x^a T^{0b} - x^b T^{0a}\, dx^1 dx^2 dx^3\,,$$

ad assumendo che gli integrandi siano funzioni differenziabili concontinuità e che in in intorno dell'istante t abbiano supporto compatto nello spazio, allora:

$$M^{ab}_{\mathscr{F}}(t) = M^{ab}_{\mathscr{F}}(0)\,.$$

2. Fornire un'intepretazione fisica alla quantità

$$L^{(\mathscr{F})}_\gamma := \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \epsilon_{\gamma\alpha\beta} M^{\alpha\beta}_{\mathscr{F}} \quad \text{dove } \gamma = 1,2,3.$$

Suggerimento. $L^{(\mathscr{F})}_\gamma$ è la componente γ del momento angolare in $\mathscr{F}$ calcolato rispetto all'origine delle coordinate.

3. Provare che se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ sono collegati dalla trasformazione di Poincaré $x'^a = \Lambda^a{}_b x^b + C^a$ e $M^{ab}_{\mathscr{F}}$, $M^{ab}_{\mathscr{F}'}$ sono definiti come sppra, allora:

$$M^{ab}_{\mathscr{F}'} = \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d M^{cd}_{\mathscr{F}} + C^a P^b_{\mathscr{F}'} - C^b P^a_{\mathscr{F}'} \,.$$

4. Specializzando $M^{ab}_{\mathscr{F}}(t) = M^{ab}_{\mathscr{F}}(0)$ al caso $a = 0, b = \beta$ provare che

$$\frac{1}{c}\int_{\Sigma^{(\mathscr{F})}_t} T^{0\beta}(t) dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{d}{dt}\int_{\Sigma^{(\mathscr{F})}_t} x^\beta \frac{T^{00}}{c^2} dx^1 dx^2 dx^3$$

e dare un'intepretazione fisica di questa identità.

Suggerimento. L'argomento della derivata temporale nel membro di destra è Mx^β_G dove x^β_G è la coordinata β del *centro di massa* del sistema fisico nel sistema di riferimento $\mathscr{F}$ e dove la *massa totale* è definita da $M = \int_{\Sigma^{(\mathscr{F})}_t} \frac{T^{00}}{c^2} dx^1 dx^2 dx^3$, il membro di sinstra è la componente β del momento totale.

5. Le equazioni di Maxwell sono scritte in termini del tensore elettromagnetico F^{ab}:

$$\nabla_a F^{ab} = J^b \qquad \epsilon^{abcd}\nabla_b F_{cd} = 0 \,,$$

dove J è la densità di quadricorrente elettrica $J^a = \rho_0 V^a$ e ρ_0 è la densità di carica misurata a riposo con le particlelle del continuo. Benché il campo elettromagnetico non sia un continuo classico (non si può definirne un campo di velocità) si definisce comunque il tensore energia impulso del campo elettromagnetico:

$$T^{ab}_{EM} = F^{ac} F^b{}_c - \frac{1}{4} g^{ab} F_{cd} F^{cd} \,.$$

Provare che tale tensore soddisfa l'equazione di conservazione $\nabla_a T^{ab}_{EM} = 0$ in assenza di cariche elettriche, come conseguenza delle equazioni di Maxwell. Provare che nel caso generale:

$$\nabla_a T^{ab}_{EM} = F^{bc} J_c \,.$$

Si osservi che $F^{bc}J_c = -J_c F^{cb}$ è la densità di forza di Lorentz agente sulle cariche del continuo carico. Porvare che T^{00}_{EM} è la densità di energia già nota classicamente, ed è dunque non negativo, mentre le componenti $T^{0\alpha}_{EM}$, $\alpha = 1,2,3$ sono le componenti del vettore di Poynting.

6. Si consideri un gas di particelle non interagenti cariche, con densità di carica $\rho_0 = \kappa\mu_0$ (dove κ è una costante delle dimensione di [carica]/[massa]) soggette alla densità di forza di Lorentz

$$f^b = \rho_0 V_a F^{ab}$$

dovuta al campo elettromagnetico. Provare che:

$$\nabla_a \left(T^{ab}_{EM} + T^{ab} \right) = 0 \, ,$$

dove $T^{ab} = \mu_0 V^a V^b$.

Soluzione. $\nabla_a T^{ab}_{EM} = -J_c F^{cb} = -\kappa\mu_0 F^{cb} = -f^b$ and $\nabla_a T^{ab} = f^b$ in accordo con l'esercizio (2) in Esercizi 5.3.

Capitolo 6

Elementi di teoria dei gruppi di Lie matriciali.

In questo capitolo vedremo alcune proprietà dei gruppi di Lie matriciali che poi applicheremo nel caso del gruppo di Lorentz.

6.1 Richiami sui gruppi di Lie.

Definizione 6.1. (**Gruppo di Lie**.) Un **gruppo di Lie** è una varietà differenziabile (di classe C^∞) G dotata di applicazioni differenziabili

$$\phi : G \ni g \mapsto g^{-1} \in G \,,$$

e

$$\psi : G \times G \ni (g,h) \mapsto gh \in G \,,$$

dove $G \times G$ è dotata della *struttura differenziabile prodotto*, tali che (G, ψ, ϕ) sia un gruppo in cui ψ è la moltiplicazione gruppale e ϕ è la funzione che associa l'inverso ad ogni elemento del gruppo. $\diamondsuit$

Nota 6.1. La richiesta di differenziabilità può essere indebolita fino a considerare gruppi, che diremo *topologici*, che siano solamente varietà di classe C^0 (varietà topologiche) con operazioni di gruppo continue rispetto alla topologia del della varietà. Viceversa su alcuni testi la richiesta di differenziabilità è rafforzata con quella di analiticità: si richiede cioè che la varietà sia una varietà analitica (C^ω) e che le operazioni di gruppo siano funzioni analitiche. Se si accetta la definizione di gruppo di Lie che abbiamo dato noi, i gruppi di Lie con struttura C^ω appena introdotti vengono detti gruppi di Lie *analitici*. In realtà queste definizioni apparentemente diverse sono *tutte equivalenti* a causa di un famoso teorema di Gleason, Montgomery e Zippin del 1952. Tale teorema prova che ogni gruppo topologico ammette sempre una sotto-struttura differenziabile di classe analitica C^ω rispetto a cui le operazioni di gruppo sono funzioni analitiche e tale struttura è univocamente determinata.

Consideriamo un elemento $g \in G$, esso definisce un'applicazione differenziabile $P_g : G \ni h \mapsto P_g(h) = gh$. Quindi, se $P_{g*} := dP_g$, tale funzione si deve vedere come una mappa

$$P_{g*} : T_h G \to T_{gh} G \, .$$

Ulteriormente dalle proprietà del differenziale vale $P_{fg*} = P_{f*} P_{g*}$. Fissato $A \in T_1 G$, possiamo allora considerare l'equazione differenziale del prim'ordine

$$\frac{df}{dt} = P_{f(t)*} A \, ,$$

con la condizione iniziale $f(0) = 1$ elemento neutro di G. Le soluzioni del problema di Cauchy posto sono funzioni a valori nel gruppo stesso G definite su intervalli aperti $I \subset \mathbb{R}$ che contengono 0.
In base ai noti teoremi di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy, la *soluzione massimale* $f_A : I_A \to G$, che include tutte le soluzioni locali come sottosoluzioni esiste ed è unica. Consideriamo ora la funzione, per $t' \in \mathbb{R}$ fissato, $t \mapsto H(t) := f_A(t') f_A(t)$. Per come è definita P vale:

$$H(t) = f_A(t') f_A(t) = P_{f_A(t')}(f_A(t))$$

e quindi, se deriviamo in t avremo:

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{df_A(t') f_A(t)}{dt} = P_{f_A(t')*} \frac{df_A(t)}{dt} = P_{f_A(t')*} P_{f_A(t)*} A = P_{H(t)*} A \, .$$

D'altra parte la funzione $t \mapsto H'(t) := f_A(t' + t)$ soddisfa la stessa equazione differenziale:

$$\frac{dH'(t)}{dt} = \frac{df_A(t'+t)}{dt} = \frac{df_A(t'+t)}{d(t'+t)} = P_{f_A(t'+t)*} A = P_{H'(t)*} A \, .$$

e vale la condizione iniziale comune $H(0) = H'(0) = f_A(t')$. Per il teorema di unicità concludiamo che $H(t) = H'(t)$ ossia, per ogni $A \in T_1 G$ vale la proprietà di **sottogruppo ad un parametro**

$$f_A(t') f_A(t) = f_A(t'+t) (\; = f_A(t) f_A(t') \;)$$

purché $t, t', t'+t$ appartengano al dominio I_A della soluzione massimale. La soluzione massimale è sicuramente *completa* (cioè $I_A = \mathbb{R}$) se G è compatto come ben noto dalla teoria dei sistemi di equazioni differenziali su varietà. In relatà si può provare che nel caso in esame in cui la varietà è un gruppo di Lie f_A è sempre completa [23], tuttavia noi non avremo bisogno di usare questa proprietà generale nel seguito e la proveremo (indipendentemente dalla teoria generale dei gruppi di Lie) nel caso dei gruppi di Lie matriciali, gli unici che useremo nelle applicazioni fisiche.

Definizione 6.2. (**Sottogruppo ad un parametro**.) *Sia G un gruppo di Lie. Per ogni vettore $A \in T_1G$, la soluzione massimale dell'equazione*

$$\frac{df}{dt} = P_{f(t)*}A\,,$$

con condizione iniziale $f_A(0) = 1$, indicata con

$$I_A \ni t \mapsto \exp(tA)$$

è detta **sottogruppo ad un parametro generato da** *A.* $\diamondsuit$

Nota 6.2. Si osservi che in particolare $(\exp(tA))^{-1} = \exp(-tA)$ purchè sia t che $-t$ appartengano al dominio I_A della funzione.

Consideriamo ora $A \in T_1G$ fissato e la classe di applicazioni parametrizzate per t definito in un intorno di 0:

$$F_{t,A} : G \ni g \mapsto \exp(tA)\, g\, \exp(-tA)$$

Dato che $F_{t,A}(1) = 1$, il differenziale $dF_{t,A}|_1$ definisce un'applicazione da T_1G nello spazio tangente al punto $\exp(tA)\ 1\ \exp(-tA)$ cioè T_1G.

Definizione 6.3. (**Aggiunto e commutatore**.) *Sia G un gruppo di Lie e si ponga, per $A \in T_1G$,*

$$F_{t,A} : G \ni g \mapsto \exp(tA)\, g\, \exp(-tA)\,.$$

(a) *Il differenziale $dF_{t,A}|_1$ indicato con*

$$Ad\, F_{t,A} : T_1G \to T_1G\,,$$

*e detto l'***aggiunto** *di $F_{t,A}$.*
(b) *Il* **commutatore** *è l'applicazione da $T_1G \times T_1G$ in T_1G data da*

$$[A, B] := \frac{d}{dt}|_{t=0}(Ad\, F_{t,A})\, B\,.$$

per ogni coppia $A, B \in T_1G$. $\diamondsuit$

Proposizione 6.1. *In riferimento alle definizioni date si verificano facilmente le seguenti proprietà del commutatore, la* linearità a sinistra*:*

$$[aA + bB, C] = a[A, C] + b[B, C]$$

*l'*antisimmetria*:*

$$[A, B] = -[B, A]$$

*(questa implica che la linearità valga anche a destra) e l'*identità di Jacobi*:*

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

dove $A, B, C \in T_1 G$ e $a, b \in \mathbb{R}$ sono arbitrari. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Vedi [23] $\square$.

Nota 6.3. Si noti che la linearità a sinistra e l'anti simmetria implicano immediatamente la linearità a destra, per cui il commutatore è bilineare.

Definizione 6.4. (**Algebre di Lie**.) La struttura algebrica data da uno spazio vettoriale V con un'applicazione, detta commutatore, $\{\ ,\ \} : V \times V \to V$ che gode delle proprietà di linearità a sinistra, antisimmetria e identità di Jacobi è detta **algebra di Lie**. Ulteriormente:
(a) date due algebre di Lie $(V, \{\ ,\ \})$ e $(V', \{\ ,\ \}')$, un isomorfismo di spazi vettoriali $\phi : V \to V'$ è detto **isomorfismo di algebre di Lie** se conserva la struttura di algebra di Lie, ossia soddisfa anche $\{\phi(A), \phi(B)\}' = \phi(\{A, B\})$ per ogni $A, B \in V$;
(b) se G è un gruppo di Lie, l'algebra di Lie costituita dallo spazio tangente $T_1 G$ insieme al commutatore $[\ ,\ ]$ di definizione 6.3 è detta **algebra di Lie del gruppo** G. $\diamondsuit$

Un famoso teorema dovuto a Lie prova che:

Teorema 6.1. (**Teorema di Lie**.) *Se due gruppi di Lie G e G' hanno algebre di Lie isomorfe allora esiste un diffeomorfismo da un intorno dell'identità di G ad un intorno dell'identità di G' che è isomorfismo di gruppo: tali gruppi di Lie sono detti* **localmente isomorfi**.
Inoltre per ogni algebra di Lie c'è un gruppo di Lie semplicemente connesso che ammette tale algebra di Lie come algebra di Lie del gruppo, tale gruppo è determinato a meno di isomorfismi di gruppi di Lie, cioè di diffeomorfismi che sono anche isomorfismi gruppali. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Vedi [23] $\square$.

Definizione 6.5. (**Sottogruppo di Lie**.) *Se G è un gruppo di Lie e $G' \subset G$ è una sottovarietà embedded di G che è ancora gruppo rispetto alle operazioni di gruppo di G ristrette a G', allora G' acquista naturalmente una struttura di gruppo di Lie indotta da quella di G e si dice* **sottogruppo** *di Lie di G.*$\diamondsuit$

Commenti 6.1.
(1) È immediato provare che l'algebra di Lie di G' risulta essere una **sottoalgebra di Lie** di G, nel senso che $T_1 G'$ è sottospazio vettoriale di $T_1 G$ e il commutatore su $T_1 G'$ è la restrizione del commutatore di $T_1 G$ a $T_1 G'$.
(2) Esiste un teorema molto potente (es. vedi [24]) che assicura che ogni sottogruppo chiuso K di un gruppo di Lie analitico G è un sottogruppo di Lie analitico di G. La dimostrazione

richiede tecniche avanzate. In realtà il teorema ha validità generale per gruppi di Lie con la nostra definizione: la richiesta di analiticità può essere omessa a causa del teorema di Gleason, Montgomery e Zippin che assicura che ogni gruppo di Lie è anche un gruppo analitico di Lie rispetto ad una struttura differenziabile analitica univocamente determinata.

In virtù dell'ultimo commento possiamo enunciare il seguente fondamentale teorema.

Teorema 6.2. *Se $G' \subset G$ è sottogruppo chiuso del gruppo di Lie G, allora è anche sottogruppo di Lie di G.* $\diamondsuit$.

Esercizi 6.1.

1. Se G è un gruppo di Lie e $A_1, \dots A_n$ è una base nella sua algebra di Lie, essendo il commutatore bilineare sull'algebra a valori nell'algebra, deve essere rappresentato da un tensore

$$C \in T_1^*G \otimes T_1^*G \otimes T_1G$$

In componenti

$$[A_i, A_j] = C_{ij}{}^k A_k \,.$$

Le componenti di T sono dette **costanti di struttura** del gruppo.
Dimostrare che se due gruppi di Lie hanno le stesse costanti di struttura rispetto a due basi nelle rispettive algebre di Lie allora sono *localmente isomorfi* nel senso del teorema di Lie.
Suggerimento: Provare che l'applicazione lineare che identifica le due basi è un isomorfismo di algebre di Lie.

2. Sia G un gruppo di Lie e sia $A_1, \dots, A_n$ una base della sua algebra di Lie. Si consideri l'applicazione definita su un intorno sufficientemente piccolo dell'origine di $\mathbb{R}^n$

$$F : (x^1, \dots, x^n) \mapsto e^{\sum_{k=1}^n x^n A_n} \,.$$

Dimostrare che tale applicazione (1) è ben definita, cioè l'intorno sufficientemente piccolo di cui sopra esiste davvero, e che (2) definisce un sistema di coordinate della struttura differenziabile di G nell'intorno dell'identità del gruppo. Tale sistema di coordinate viene detto *sistema di coordinate di prima specie.*
Suggerimento: dai teoremi sulla dipendenza dai parametri dell'equazione nelle soluzioni delle equazioni differenziali del prim'ordine su varietà segue che la funzione detta è localmente ben definita. Inoltre, se $e_1, \dots, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, $dF_0 : e_i \mapsto A_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, per cui $dF_0 : \mathbb{R}^n \to T_1G$ è iniettiva (e quindi surgettiva essendo i due spazi delle stesse dimensioni). Il teorema della funzione implicita implica subito che F sia un diffeomorfismo locale tra $\mathbb{R}^n$ e G a valori in un intorno di $1 \in G$.

3. Sia G un gruppo di Lie e sia $A_1, \dots, A_n$ una base della sua algebra di Lie. Si consideri l'applicazione definita su un intorno sufficientemente piccolo dell'origine di $\mathbb{R}^n$

$$H : (x^1, \dots, x^n) \mapsto e^{x^1 A_1} \cdots e^{x^n A_n} \,.$$

Dimostrare che tale applicazione (1) è ben definita, cioè l'intorno sufficientemente piccolo di cui sopra esiste davvero e che (2) definisce un sistema di coordinate della struttura differenziabile di G nell'intorno dell'identità del gruppo. Tale sistema di coordinate viene detto *sistema di coordinate di seconda specie.*
Suggerimento: Ognuno dei gruppi ad un parametro $x^i \mapsto e^{x^i A_i}$ è definito per x^i in un intorno di 0, per cui c'è un intorno rettangolare dell'origine di $\mathbb{R}^n$ in cui la funzione è definita. Inoltre, se $e_1, \ldots, e_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, si prova facilmente che $dH_0 : e_i \mapsto A_i$ per costruzione per ogni $i = 1, \ldots, n$, per cui $dH_0 : \mathbb{R}^n \to T_1 G$ è iniettiva (e quindi surgettiva essendo i due spazi delle stesse dimensioni). Il teorema della funzione implicita implica subito che H sia un diffeomorfismo locale tra $\mathbb{R}^n$ e G a valori in un intorno di $1 \in G$.

6.2 Gruppi di Lie di matrici.

Passiamo a specializzare la teoria a gruppi di Lie di matrici. È importante precisare che questa non è una forte restrizione in quanto si può provare che ogni gruppo di Lie compatto è isomorfo ad un gruppo di Lie matriciale (per quelli non compatti il teorema non vale, un controesempio tipico è il rivestimento universale del gruppo $SL(2, \mathbb{R})$). Nel seguito $GL(n, \mathbb{K})$ indicherà il gruppo delle matrici $n \times n$ non singolari (cioè con determinante non nullo) sul campo $\mathbb{K}$ e $M(n, \mathbb{K})$ indicherà l'insieme completo delle matrici $n \times n$ sul campo $\mathbb{K}$ che è sempre $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$.
Le coordinate naturali di $\mathbb{K}^{n^2}$, $x^1, \ldots, x^{n^2}$ determinano una matrice di $M(n, \mathbb{K})$ se si identificano le righe di quest'ultima come gli n gruppi di coordinate contigui di n elementi. D'ora in poi seguiremo questa convenzione.
Possiamo mettere su $M(n, \mathbb{K})$ la topologia indotta dalla norma naturale di $\mathbb{K}^{n^2}$ che lo rende spazio normato completo. Possiamo riscrivere tale norma come, se $A \in M(n, \mathbb{K})$:

$$||A|| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2} \,.$$

Abbiamo ora bisogno di alcuni risultati riguardanti l'estensione della funzione esponenziale a valori in $M(n, \mathbb{C})$. Tali risultati sono enunciati in tre lemmi di seguito. Il primo è in realtà più generale.

Lemma 6.1. *Si consideri l'applicazione*

$$M(n, \mathbb{K}) \ni A \mapsto ||A|| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2} \,.$$

con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà.
(1) *Tale applicazione è una norma su $M(n, \mathbb{K})$.*
(2) *Se $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ allora*

$$||AB|| \leq ||A||||B|| \,.$$

(3) *Lo spazio* $M(n,\mathbb{C})$ *dotato della norma detta sopra è* completo.
(4) *Se* $\mathbb{K} \ni z \mapsto A(z) \in M(n,\mathbb{R})$ *è una funzione arbitraria a valori in* $M(n,\mathbb{R})$*, allora*

$$\lim_{z\to z_0} A(z) = A_0$$

se e solo se per ogni $i,k = 1,\ldots,n$

$$\lim_{z\to z_0} (A(z))_{ik} = (A_0)_{ik}\,.$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. (1) L'applicazione definita sopra non è altro che la norma di $\mathbb{K}^{n^2}$ scritta in modo differente. (2)

$$||AB||^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} |A_{ij}B_{jk}|^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} |A_{ij}|^2|B_{jk}|^2 \leq \sum_{i,k=1}^{n} \sqrt{\sum_j |A_{ij}|^4}\sqrt{\sum_p |B_{pk}|^4}\,,$$

dove abbiamo applicato la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Si tenga ora conto che banalmente (basta quadrare ambo membri):

$$\sqrt{\sum_j |A_{ij}|^4} \leq \sum_j |A_{ij}|^2$$

e vale la stessa cosa per B. Per cui dalle disuguaglianze di sopra

$$||AB||^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} |A_{ij}B_{jk}|^2 \leq \sum_{i,k=1}^{n} \sum_j |A_{ij}|^2 \sum_p |B_{pk}|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|^2 \sum_{k,p=1}^{n} |B_{pk}|^2$$

che significa

$$||AB||^2 \leq ||A||^2||B||^2\,.$$

Estraendo la radice quadrata ad ambo membri si ha la tesi. (3) È un risultato generale che tutti gli spazi vettoriali di dimensione finita dotati di norma sono completi rispetto alla topologia indotta dalla norma (vedi [25]).
(4) Si tratta della ben nota proprietà (dai corsi elementari di analisi) di funzioni da $\mathbb{K}$ a $\mathbb{K}^p$ tenendo conto che la norma definita è quella di $\mathbb{K}^p$ con $p = n^2$. $\Box$

Nota 6.4. L'insieme delle matrici complesse $n \times n$ unitamente alla norma definita sopra per la completezza di $M(n,\mathbb{K})$ definiscono quella che si chiama un'*algebra di Banach*.

Lemma 6.2. *Se* $A \in M(n,\mathbb{C})$ *e* $z \in \mathbb{C}$*, la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{A^k}{k!}$$

converge assolutamente (rispetto a alla norma di $M(n,\mathbb{C})$) ed uniformemente nella topologia di $M(n,\mathbb{C})$ in ogni disco $|z| \leq R < +\infty$ e può essere derivata sotto il segno di serie in z infinite volte. In particolare:
(1) *la funzione*

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto e^{zA} := \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{A^k}{k!} \tag{6.1}$$

è ben definita e infinitamente differenziabile su $\mathbb{C}$;
(2) *per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale*

$$\frac{d}{dz} e^{zA} = Ae^{zA} = e^{zA} A\,, \tag{6.2}$$

(3) *per ogni coppia $z, z' \in \mathbb{C}$ vale*

$$e^{zA+z'A} = e^{zA} e^{z'A} = e^{z'A} e^{zA}\,. \tag{6.3}$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sulla validità degli analoghi teoremi delle serie di funzioni complesse a valori complessi che si estendono banalmente per serie di funzioni da $\mathbb{C}$ a valori in spazi di Banach. In particolare vale il teorema di Weierstrass che assicura che se una serie è dominata da una serie di termini numerici positivi allora si ha la convergenza assoluta e uniforme. Nel nostro caso, se $|z| \leq R$, per il lemma 6.1

$$\left|\left| z^k \frac{A^k}{k!} \right|\right| \leq |z|^k \frac{||A||^k}{k!} \leq R^k \frac{||A||^k}{k!}$$

e la serie di termini positivi

$$\sum_{k=0}^{\infty} R^k \frac{||A||^k}{k!}$$

converge (a $\exp(R||A||)$).
(1) Similmente, la serie delle derivate di ordine p converge uniformemente in $|z| \leq R$ perché dominata dalla serie convergente di termini positivi

$$\sum_{k=0}^{\infty} R^k ||A||^p \frac{||A||^k}{k!} = ||A||^p e^{R||A||}\,.$$

questo implica che per ogni intero p e per ogni coppia $i, j = 1, \ldots, n$ la serie di funzioni a valori in $\mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^p}{dz^p} z^k \frac{(A^k)_{ij}}{k!}$$

converge assolutamente ed uniformemente. Usando iterativamente un noto teorema di analisi si trova allora che, per ogni intero q e per ogni coppia $i, j = 1, \ldots, n$ esiste la derivata q esima di $(\exp(zA))_{ij}$ e vale

$$\frac{d^q}{dz^q}(\exp(zA))_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^q}{dz^q} z^k \frac{(A^k)_{ij}}{k!} .$$

In base alla proprietà (4) del lemma 4.1, esiste la derivata q esima di $\exp(zA)$ nella norma $|| \, ||$ e vale

$$\frac{d^q e^{zA}}{dz^q} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^q}{dz^q} z^k \frac{(A^k)}{k!} .$$

In particolare la somma della serie può essere derivata sotto il segno di somma infinite volte. Passiamo a (2) Semplicemente derivando sotto il segno di somma si ha

$$\frac{d}{dz} e^{zA} = \sum_{k=1}^{\infty} A z^{k-1} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} A$$

Ridefinendo $k = p - 1$ e usando il lemma 4.1 da cui le proprietà

$$||A(\exp(zA) - S_n)|| \leq ||A|| ||(\exp(zA) - S_n)|| \to 0$$

e

$$||(\exp(zA) - S_n)A|| \leq ||(\exp(zA) - S_n)|| ||A|| \to 0$$

dove S_n è la ridotta della serie troncata all'ordine n, si ha

$$\sum_{p=0}^{\infty} A z^p \frac{A^p}{p!} = A \sum_{p=0}^{\infty} z^p \frac{A^p}{p!} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} z^p \frac{A^p}{p!} \right) A :,$$

che è la tesi.
Per concludere la prova di (3) è identica a quella che si ha per la funzione esponenziale a valori numerici complessi, *tenendo conto del fatto che* $(zA)(z'A) = (z'A)(zA)$ che viene usato in un passaggio (vedi per esempio le prime pagine di [25]). □

Nota 6.5. La proprietà (3) si può rinforzare, usando la stessa dimostrazione, in

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$$

sotto l'ipotesi che

$$AB = BA .$$

In assenza di tale ipotesi la proprietà enunciata è generalmente *falsa*.

Lemma 6.3. *Se $A \in M(n, \mathbb{C})$ allora, per ogni $t \in \mathbb{C}$*

$$det\, e^{tA} = e^{t\, tr\, A}\,,$$

in particolare

$$det\, e^{A} = e^{tr\, A}\,.$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione

$$\mathbb{C} \ni t \mapsto \det e^{tA}\,.$$

Vogliamo calcolarne la derivata per t arbitrario. Ci interessa cioè

$$\lim_{h\to 0} \frac{\det e^{(t+h)A} - \det e^{tA}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\det(e^{tA}e^{hA}) - \det e^{tA}}{h} = \det e^{tA} \lim_{h\to 0} \frac{\det e^{hA} - 1}{h}$$

purché l'ultimo limite esista. Vale

$$e^{hA} = I + hA + ho(h)\,,$$

dove $o(h) \to 0$ se $h \to 0$ nella topologia metrica di $\mathbb{C}^{n^2}$ per cui

$$\lim_{h\to 0} \frac{\det\, e^{(t+h)A} - \det e^{tA}}{h} = \det e^{tA} \lim_{h\to 0} \frac{\det(I + hA + ho(h)) - 1}{h}\,.$$

Ricordiamo che

$$\det B = \epsilon^{i_1 \ldots i_n} B_{1i_1} \cdots B_{ni_n}\,,$$

per cui si ha subito che

$$det(I + hA + ho(h)) = 1 + h\sum_{i=1}^{n} A_{ii} + h0(h)\,.$$

Inserendo sopra troviamo che:

$$\frac{d \det e^{tA}}{dt} = \det e^{tA} \mathrm{tr} A\,.$$

Ciò prova anche che la funzione considerata è infinitamente differenziabile. Quindi la funzione infinitamente differenziabile $f_A : \mathbb{C} \ni t \mapsto \det e^{tA}$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{df_A(t)}{dt} = (\mathrm{tr}\ A) f_A(t)\,.$$

La funzione infinitamente differenziabile $g_A : \mathbb{C} \ni t \mapsto e^{t\,\mathrm{tr}\, A}$ soddisfa banalmente la stessa equazione differenziale

$$\frac{dg_A(t)}{dt} = (\mathrm{tr}\ A) g_A(t)\,.$$

Entrambe le funzioni soddisfano la condizione iniziale $f_A(0) = g_A(0) = 1$, di conseguenza per il teorema di unicità delle soluzioni massimali delle equazioni differenziali del prim'ordine, le due funzioni coincidono per ogni $t \in \mathbb{C}$ e deve essere:

$$\det e^{tA} = e^{t\operatorname{tr} A} .$$

Questo implica la tesi per $t = 1$. $\Box$

Proposizione 6.2. **(Il gruppo di Lie $GL(n, \mathbb{R})$)**. *Il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo di Lie con la struttura di varietà differenziabile indotta da $\mathbb{R}^{n^2}$. Valgono ulteriormente le seguenti proprietà.*
(1) *L'algebra di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$ è data dall'insieme di matrici reali $n \times n$, $M(n, \mathbb{R})$ ed il commutatore è definito come*

$$[A, B] = AB - BA ,$$

per ogni coppia $A, B \in M(n, \mathbb{R})$.
(2) *I sottogruppi ad un parametro di $GL(n, \mathbb{R}^n)$ sono completi (cioè definiti su tutto $\mathbb{R}$ nel parametro) ed hanno la forma*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA}$$

per ogni $A \in M(n, \mathbb{R})$, dove l'esponenziale è quello definito nel lemma 6.2

Dimostrazione. Pensiamo le matrici A reali $n \times n$ come punti di $\mathbb{R}^{n^2}$ le cui coordinate naturali individuano, se lette di seguito in gruppi contigui di n elementi (le n righe di A). Per quanto riguarda il fatto che $GL(n, \mathbb{R})$ sia un gruppo di Lie, è sufficiente dimostrare due cose:
(1) $GL(n, \mathbb{R})$ è una varietà differenziabile;
(2) le operazioni di composizione e di calcolo dell'inversa sono differenziabili rispetto alla struttura differenziabile di $\mathbb{R}^{n^2}$.
La funzione determinante da $\mathbb{R}^{n^2}$ in $\mathbb{R}$ è indubbiamente differenziabile in quanto è un polinomio nelle coordinate globali di $\mathbb{R}^{n^2}$. La controimmagine di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ secondo tale funzione è chiaramente un insieme aperto essendo la funzione continua. Possiamo assegnare a tale insieme la struttura di varietà differenziabile restringendo la carta globale naturale di $\mathbb{R}^{n^2}$ a tale insieme. Ciò definisce una struttura differenziabile su $GL(n, \mathbb{R})$ che altro non è che l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^{n^2}$ sui quali la funzione determinante è non nulla. La seconda proprietà è ovvia per quanto riguarda la moltiplicazione, per il calcolo della funzione inversa lo è anche usando, nell'insieme aperto che definisce la varietà $GL(n, \mathbb{R})$, la regola di Kramer per il calcolo dell'inversa, in quanto le componenti (coordinate di $\mathbb{R}^{n^2}$) della matrice inversa di $A \in GL(n, \mathbb{R})$, sono funzioni razionali con denominatori mai nulli nelle coordinate che definiscono la matrice A.
Veniamo alla seconda parte. Dimostriamo (1) e (2) insieme. Se $A \in M(n, \mathbb{R})$, si consideri la funzione $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA}$. In base al lemma 6.3 tale funzione ammette valori solamente in $GL(n, \mathbb{R})$ perché $\det e^{tA} = e^{t\operatorname{tr} A} > 0$ per ogni $A \in M(n, \mathbb{R})$. Usando (2) di lemma 4.2 otteniamo

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A .$$

Per $t = 0$ si riottiene la matrice A che dunque è in $T_1GL(n, \mathbb{R})$ perchè $e^{0A} = 1$. Abbiamo provato che $M(n, \mathbb{R}) \subset T_1GL(n, \mathbb{R})$. Dato che deve essere per costruzione $\dim T_1GL(n, \mathbb{R}) \leq n^2$ e che $\dim M(n, \mathbb{R}) = n^2$ allora $M(n, \mathbb{R}) = T_1GL(n, \mathbb{R})$. Se $A \in T_1GL(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$, l'equazione che definisce il sottogruppo ad un parametro generato da A si scrive banalmente (specializzando la definizione 6.1 e tenendo conto che il prodotto del gruppo è quello matriciale ordinario):

$$\frac{df_A(t)}{dt} = f_A(t)A\,.$$

La funzione $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA}$ definita nel lemma 6.2 soddisfa banalmente tale equazione differenziale di sopra a causa di (2) del suddetto lemma. Per l'unicità della soluzione questa è l'unica soluzione ed è dunque la forma esplicita del sottogruppo ad un parametro generato da A. Si noti che per costruzione la soluzione è completa. Applicando la definizione in (b) di definizione 6.3 si ha immediatamente che il commutatore dell'algebra di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$ è

$$[A, B] = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(e^{tA}Be^{-tA}\right) = AB - BA$$

per ogni coppia $A, B \in M(n, \mathbb{R})$. $\Box$

Possiamo allora dare la seguente definizione.

Definizione 6.6. (**Gruppo di Lie matriciale reale** $n \times n$). Un gruppo di Lie matriciale reale $n \times n$ è un sottogruppo di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$. $\diamondsuit$

Abbiamo le seguenti proprietà elementari dei gruppi di Lie matriciali di immediata verifica.

Proposizione 6.3. (**Proprietà dei gruppi di Lie matriciali**). *Sia G un gruppo di Lie matriciale reale $n \times n$ allora valgono le seguenti proprietà.*
(1) *G è un gruppo di Lie con la struttura di varietà differenziabile indotta da $\mathbb{R}^{n^2}$.*
(2) *L'algebra di Lie di G è una sotto algebra di $M(n, \mathbb{R})$ dotata del commutatore*

$$[A, B] = AB - BA\,.$$

(3) *I sottogruppi ad un parametro di G sono completi ed hanno la forma*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA}$$

per ogni $A \in T_1G$, dove l'esponenziale è quello definito nel lemma 6.2 $\diamondsuit$

Dimostrazione È tutto immediata conseguenza della proposizione 6.2 $\Box$

6.3 I gruppi di Lie $O(3)$ e $SO(3)$.

Esaminiamo un gruppo di Lie molto importante, il gruppo delle rotazioni n-dimensionali $O(n)$:

$$O(n) := \{R \in M(n, \mathbb{R}) \mid RR^t = I\} .$$

Abbiamo il seguente teorema.

Teorema 6.3. (**Proprietà elementari del gruppo di Lie $O(n)$.**) *si consideri l'insieme di matrici:*

$$O(n) := \{R \in M(n, \mathbb{R}) \mid RR^t = I\} .$$

Allora valgono le seguenti proprietà.
(1) *$O(n)$ è un gruppo di Lie matriciale reale $n \times n$ chiuso rispetto alla trasposizione di matrici ed è detto* **gruppo delle rotazioni n-dimensionali**.
(2) *L'algebra di Lie di $O(n)$, indicata con $o(n)$, è data dallo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ reali antisimmetriche. Tale spazio ha dimensione $n(n-1)/2$.*
(3) *$O(n)$ è compatto.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. (1) Prima di tutto mostriamo che $O(n)$ è un gruppo ed è chiuso rispetto alla trasposizione. $I \in O(n)$ banalmente, se $R, R' \in O(n)$ allora

$$(RR')(RR')^t = RR'R'^tR^t = RIR^t = RR^t = I ,$$

per cui $O(n)$ è chiuso rispetto al prodotto.È sufficiente provare, per concludere che $O(n)$ è un gruppo, che esso è chiuso rispetto al calcolo dell'inversa. Il fatto che $RR^t = I$ implica che $detR\, detR^t = 1$ ossia $(detR)^2 = 1$ da cui $detR = \pm 1$, ma in ogni caso $detR \neq 0$ per cui esiste la matrice inversa di ogni $R \in O(n)$ e coincide con la trasposta di R. Se proviamo che $R^{-1} \in O(n)$ abbiamo provato anche la chiusura rispetto alla trasposizione. Se $R \in O(n)$, dato che l'inversa destra coincide con quella sinistra si ha $R^{-1}R = I$, trasponendo $R^t(R^{-1})^t = I$ ma essendo $R^t = R^{-1}$, abbiamo che $R^{-1}(R^{-1})^t = I$ ossia $R^{-1} \in O(n)$. Con ciò abbiamo provato che $O(n)$ è un gruppo rispetto al prodotto di matrici, per cui è anche sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$. Per concludere il punto (1) dato che $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$, è sufficiente provare che $O(n)$ è una sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^{n^2}$. Ricordiamo un ben noto teorema detto *teorema dei valori regolari* [27, 2]:
si considerino due varietà differenziabili M, N con dimensione rispettivamente m, n con $m > n$, e una funzione differenziabile $f : M \to N$. Se $p \in N$ è tale che per tutti i punti $x \in P := f^{-1}(\{p\})$ df_x è suriettiva (cioè la matrice jacobiana associata ha rango n) allora $P \subset M$ è una sottovarietà embedded di M di dimensione $m - n$.
Notiamo che la richiesta che df_x sia suriettiva è equivalente alla richiesta che:
il nucleo di df_x abbia dimensione $m - n$.
Consideriamo allora la definizione di $O(n)$. In coordinate di $\mathbb{R}^{n^2}$

$$\delta^{ik} - \sum_{j=1}^{n} x^{ij}x^{kj} = 0 .$$

Queste equazioni non sono tutte indipendenti: se scambio i e k riottengo le stesse equazioni. Le equazioni indipendenti sono per esempio quelle corrispondenti alla matrice triangolare superiore di una matrice simmetrica $n \times n$, cioè le equazioni di sopra con la restrizione $i \leq k$. Quindi sono $n(n+1)/2$. Definiamo allora una funzione da

$$f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

con componenti

$$f^{ik}(x^{11}, x^{12}, \ldots, x^{nn}) = \delta^{ik} - \sum_{j=1}^{n} x^{ij} x^{kj}$$

dove $i \leq k$. f è chiaramente differenziabile, mostriamo che i punti $R \in O(n) = f^{-1}(\{0\})$, dove 0 è il vettore nullo di $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, sono tali che il nucleo di df_R ha dimensione $n^2 - n(n+1)/2 (= n(n-1)/2)$. In base al teorema dei valori regolari ciò mostra che $O(n)$ è una sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^{n^2}$ (e quindi $GL(n, \mathbb{R})$ che contiene $O(n)$ ed ha la struttura differenziabile indotta da $\mathbb{R}^{n^2}$) di dimensione $n(n-1)/2$. Cominciamo a provare che il nucleo di df_I ha dimensione $n(n-1)/2$. Per calcolare la dimensione del nucleo di df_I consideriamo tutte le curve differenziabili $R = R(u)$ che soddisfano $R(u)R(u)^t = I$ e $R(0) = I$ e calcoliamo la dimensione dello spazio generato dai vettori tangenti nel punto I a tali curve. Per costruzione tale spazio è il nucleo di df_I. Da $R(u)R(u)^t = I$ otteniamo, se $\dot{R}$ denota il vettore tangente in $u = 0$ cioè in I:

$$\dot{R} + \dot{R}^t = 0$$

ossia

$$\dot{R} = -\dot{R}^t \, .$$

Le matrici trovate sono antisimmetriche reali $n \times n$. D'altra parte se A è una matrice antisimmetrica reale $n \times n$, la curva $R(u) := e^{uA}$, che ammette A come vettore tangente in I, soddisfa $R(u)R(u)^t = I$: direttamente dalla definizione di esponenziale

$$e^{uA}(e^{uA})^t = e^{uA} e^{uA^t} = e^{uA} e^{-uA} = e^{(u-u)A} = I$$

Dunque il nucleo di df_I è dato dallo spazio vettoriale reale delle matrici reali $n \times n$ antisimmetriche. È facile provare che tale spazio ha dimensione $n(n-1)/2$.
Passiamo ora a considerare il generico punto $g \in O(n)$. Come sopra consideriamo tutte le curve differenziabili $R = R(u)$ che soddisfano $R(u)^t R(u) = I$ (che equivale a $R(u)R(u)^t = I$) e $R(0) = g$ e calcoliamo la dimensione dello spazio generato dai vettori tangenti nel punto I a tali curve. Per costruzione tale spazio è il nucleo di df_g. Da $R(u)^t R(u) = I$ otteniamo, se $\dot{R}$ denota il vettore tangente in $u = 0$ cioè in g:

$$\dot{R}^t g + g^t \dot{R} = 0$$

ossia, essendo $g^t = g^{-1}$,

$$g^{-1}\dot{R} = -(g^{-1}\dot{R})^t \, .$$

Questo significa che $\dot{R}$ appartiene al nucleo di df_g se e solo se

$$\dot{R} = gA$$

dove $A = -\dot{R}^t g$ è antisimmetrica reale per $\dot{R}^t g + g^t \dot{R} = 0$. Cioè A appartiene al nucleo di df_I. L'applicazione generata da g è per costruzione P_{g*} e quindi è un isomorfismo di spazi vettoriali essendo il differenziale del diffeomorfismo $P_g : GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$. Quindi il nucleo di df_g ha la stessa dimensione di quello di df_I e ciò prova che siamo nelle ipotesi del teorema dei valori regolari: $O(n)$ è una sottovarietà embedded di $GL(n, \mathbb{R})$.
(2) In realtà la dimostrazione è stata data sopra in quanto i vettori tangenti a I in $O(n)$ si ottengono come i vettori tangenti per $u = 0$ delle curve $R = R(u)$ che soddisfano $R(u)R(u)^t = I$ e $R(0) = I$. Abbiamo visto sopra che tale spazio coincide con quello delle matrici antisimmetriche reali $n \times n$ che ha dimensione $n(n-2)/2$.
(3) È sufficiente provare che $O(n)$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^{n^2}$ in quanto, in $\mathbb{R}^k$, i chiusi limitati sono compatti (e viceversa). Per quanto riguarda la chiusura, è chiaro che $O(n)$ contiene i suoi punti di accumulazione: se $A_k \in O(n)$ e $A_k \to A \in \mathbb{R}^{n^2}$ per $k \to \infty$ allora banalmente $A_k^t \to A^t$ e $I = A_n A_n^t \to AA^t$. Quindi $A \in O(n)$. La limitatezza nella norma di $\mathbb{R}^{n^2}$ è ovvia. Infatti, se $R \in O(n)$:

$$||R||^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} R_{ij} R_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ii} = n \,.$$

□

Teorema 6.4. (**Struttura topologica di $O(3)$ rispetto alla connessione**.) *Il gruppo di Lie matriciale $O(3)$ ha due componenti connesse date rispettivamente da:*
il gruppo di Lie matriciale compatto (e connesso)

$$SO(3) := \{R \in O(3) \mid det\, R = 1\}$$

detto **gruppo speciale delle rotazioni tridimensionali** *e l'insieme compatto (che non è sottogruppo)*

$$PSO(3) := \{PR \in O(3) \mid R \in SO(3)\}$$

*dove $P := -I$ è l'***inversione di parità**.$\diamondsuit$

Dimostrazione. Si consideri $R \in O(3)$. Allora $det\, R = \pm 1$ direttamente dalla definizione di $O(3)$. È immediato provare che il sottoinsieme delle matrici di $O(3)$ con determinante 1 forma un sottogruppo di $O(3)$ che indicheremo con $SO(3)$. Indichiamo con $PSO(3)$ l'insieme contenente le matrici con determinante -1, $O(3) \setminus SO(3)$. È chiaro che tali due insiemi sono disgiunti e la loro unione è $O(3)$. Definiamo $P := -I$, vale $P \in PSO(3)$. Se $R \in O(3)$ può solo essere $R \in SO(3)$ oppure $R \in PSO(3)$. Valendo $PP = I$ segue subito che PR, $R \in PSO(3)$ se e solo se rispettivamente R, $PR \in SO(3)$. Di conseguenza, $PSO(3) = \{PR \in O(3) \mid R \in SO(3)\}$.

Mostreremo ora che $SO(3)$ è aperto, connesso e compatto. (Le stesse proprietà varranno anche per $PSO(3)$ perchè l'azione di P è un diffeomorfismo. Tuttavia $I \notin PSO(3)$ per cui quest'ultimo non è sottogruppo.)
Consideriamo $R \in SO(3)$. Dato che R è reale e che il polinomio caratteristico associato è di terzo grado, dal teorema fondamentale dell'algebra segue che R dovrà avere almeno un autovalore reale λ che corrisponde ad una radice reale di tale polinomio (le altre due o sono reali o sono complesse coniugate). La matrice R può sempre pensarsi come matrice unitaria in $\mathbb{C}^3$ in tal caso è noto che (1) è diagonalizzabile, (2) gli autovalori sono della forma $e^{i\alpha}$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$. Riassumendo: uno dei tre autovalori λ_1 deve essere reale con modulo 1 e gli altri due devono essere anche essi reali oppure complessi coniugati ed in ogni caso tutti con modulo 1. Per cui può essere solo $\lambda_1 = +1$ o $\lambda_1 = -1$. Nel secondo caso, al fine di avere determinante, 1 cioè prodotto degli autovalori uguale a 1, anche gli altri due autovalori devono essere reali e, dovendo essere della forma $e^{i\alpha}$ almeno uno dei due deve essere 1. In definitiva: *ogni* $R \in SO(3)$ *ammette sempre l'autovalore* 1.
Sia e_1 un autovettore normalizzato associato all'autovalore 1. Completiamo e_1 a base ortonormale di $\mathbb{R}^3$: e_1, e_2, e_3. La trasformazione dalla base canonica a quella ottenuta sarà rappresentata da una matrice L di $O(3)$ perché entrambe le basi sono ortonormali. Quindi avremo che esiste $L \in O(3)$ tale che

$$LRL^t = R' := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{bmatrix} . \tag{6.4}$$

La matrice a secondo membro sarà necessariamente in $O(3)$ perchè composizione di matrici di $O(3)$. Il calcolo del determinante con la regola di Binet mostra che $R \in SO(3)$ implica $R' \in SO(3)$. Imponendo la condizione di appartenenza a $SO(3)$ si vede subito che

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} . \tag{6.5}$$

dove $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$ e $ad - bc = 1$. Si conclude facilmente che le matrice R' deve avere la forma

$$R_\theta := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \tag{6.6}$$

dove $\theta \in \mathbb{R}$. Abbiamo provato che per ogni $R \in SO(3)$ esiste $L \in O(3)$ tale che

$$R = L^t R_{\theta_R} L$$

per qualche $\theta_R \in \mathbb{R}$. Se lasciamo variare θ da 0 a θ_R abbiamo una curva continua $\theta \mapsto L^t R_\theta L$ che congiunge I a R. Quindi $SO(3)$ è connesso per archi continui. Di conseguenza è connesso.

Si osservi che $SO(3)$ è anche un sottoinsieme aperto (nella topologia relativa) di $O(3)$ essendo l'intersezione tra $O(3)$ e la controimmagine di $(0, +\infty)$ della funzione *continua* che calcola il determinante su $GL(n, \mathbb{R})$.
Come già detto, dato che $R \mapsto PR$ è un diffeomorfismo di $O(3)$, manda aperti connessi in aperti connessi per cui essendo $SO(3)$ aperto e connesso, $PSO(3)$ è aperto e connesso. Essendo i due insiemi connessi disgiunti con unione pari a $O(3)$, essi costituiscono le componenti connesse di $O(3)$.
Per costruzione essendo $SO(3)$ una componente connessa di $O(3)$ è anche banalmente una sottovarietà di $O(3)$ nella struttura differenziabile indotta e quindi $SO(3)$ è un sottogruppo di Lie di $O(3)$ e quindi un gruppo di Lie matriciale. Dato che le componenti connesse sono banalmente aperte e chiuse, $SO(3)$ è chiuso nel compatto $O(3)$ per cui è compatto. Dato che $I \in SO(3)$ segue anche che l'algebra di Lie di $SO(3)$ coincide con quella di $O(3)$. $\Box$

Corollario. *Vale* $so(3) = o(3)$ *dove* $so(3) := T_1SO(3)$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. $PSO(3)$ non è un sottogruppo di $O(3)$ perchè non contiene l'identità. Solo la componente connessa $SO(3)$ contiene l'identità e ciò implica immediatamente che

$$T_1SO(3) = T_1O(3) .$$

$\Box$

6.4 Teorema di rappresentazione di $O(3)$ e $SO(3)$.

Introduciamo una base particolare di $so(3)$ data dalle matrici

$$(S_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk} ,$$

dove ϵ è la solita densità tensoriale di Ricci-Levi-Civita, esplicitamente

$$S_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \tag{6.7}$$

$$S_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{6.8}$$

$$S_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{6.9}$$

Tali matrici sono antisimmetriche e quindi appartengono a $so(3)$, inoltre è immediato provare che sono linearmente indipendenti per cui sono una base di $so(3)$. Le costanti di struttura assumono una forma semplice in questa base, come si prova per computo diretto

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ij}{}^k S_k \,, \tag{6.10}$$

dove $\epsilon_{ij}{}^k = \epsilon_{ijk}$ sono le componenti della solita densità tensoriale di Ricci-Levi-Civita.
Vogliamo infine provare un teorema di rappresentazione delle matrici di $SO(3)$. Abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari.

Lemma 6.4. *Per ogni $R \in SO(3)$ vale l'identità*

$$RS_iR^t = \sum_{j=1}^{3} R^t_{ij} S_j \,.$$

♢

Dimostrazione. Partiamo dalla nota relazione

$$\epsilon^{ijk} R_{pi} R_{qj} R_{rk} = (\det R)\epsilon_{pqr} \,,$$

dove gli indici sono stati abbassati con la metrica δ_{ij} e la matrice R è arbitaria. Se $R \in SO(3)$, la relazione di sopra diventa, cambiando anche i segni ad ambo membri:

$$-\epsilon^{ijk} R_{pi} R_{qj} R_{rk} = -\epsilon_{pqr}$$

ossia

$$\sum_i R_{pi}(RS_iR^t)_{qr} = (S_p)_{qr}$$

ossia moltiplicando per R_{pj} e sommando su p

$$\sum_i \delta_{ij}(RS_iR^t)_{qr} = \sum_p R_{pj}(S_p)_{qr}$$

che si riscrive

$$(RS_jR^t) = \sum_p R^t_{jp}(S_p)$$

□

Il lemma appena provato permette di concludere con un teorema di rappresentazione di $SO(3)$.

Teorema 6.5. (**Rappresentazione di** $SO(3)$.) *$R \in SO(3)$ se e solo se esistono un versore $n \in \mathbb{S}^2$ e un numero $\theta \in \mathbb{R}$ tale che*

$$R = e^{\theta n \cdot S}$$

dove

$$n \cdot S := \sum_{i=1}^{3} n^i S_i$$

essendo le matrici $S_i \in T_1SO(3)$ *date da*

$$(S_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk} \ .$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Come provato nella dimostrazione del teorema 6.4, se $R \in SO(3)$ allora esiste $L \in O(3)$ tale che $R = LR_\theta L^t$ dove R_θ è data in (6.6). Possiamo sempre cambiare, se necessario, L in $PL = -L$ al fine di avere $L \in SO(3)$ senza alterare il risultato di sopra. È facile provare che

$$R_\theta = e^{\theta S_1}$$

Infatti calcolando la derivata in θ del primo membro tramite la (6.6), si trova facilmente che

$$\frac{dR_\theta}{d\theta} = S_1 R_\theta \ .$$

D'altra parte vale anche

$$\frac{de^{\theta S_1}}{d\theta} = S_1 e^{\theta S_1} \ .$$

per cui le due funzioni soddisfano la stessa equazione differenziale, ma anche la stessa condizione iniziale:

$$R_0 = e^{0 S_1} = I \ ,$$

per cui coincidono. Ne consegue che (dove usiamo la notazione $n \cdot S := \sum_i n^i S_i$):

$$R = Le^{\theta S_1} L^t = Le^{\theta e_1 \cdot S} L^{-1} \ .$$

Usando lo sviluppo dell'esponenziale si ha

$$Le^{\theta e_1 \cdot S} L^{-1} = L(I + \theta e_1 \cdot S + \frac{1}{2}\theta e_1 \cdot S \theta e_1 \cdot S + \cdots)L^{-1} = I + \theta e_1 \cdot LSL^{-1} + \frac{1}{2}\theta e_1 \cdot LSL^{-1}\theta e_1 \cdot LSL^{-1} + \cdots$$

dove abbiamo inserito dei fattori $I = L^{-1}L$ nei punti opportuni, per cui

$$Le^{\theta e_1 \cdot S} L^{-1} = e^{\theta e_1 \cdot LSL^{-1}} = e^{\theta e_1 \cdot LSL^t} \ .$$

Usando il lemma 4.4, con ovvie notazioni

$$n \cdot LSL^t = e_1 \cdot (L^t S) = (Le_1) \cdot S \ ,$$

In definitiva, tenendo conto che n è un versore di $\mathbb{S}^2$ se e solo se $n = Ae_1$ per qualche $A \in SO(3)$, abbiamo provato che, se $R \in SO(3)$ allora per qualche $\theta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{S}^2$,

$$R = e^{\theta n \cdot S} \ .$$

Viceversa se scegliamo $n \in \mathbb{S}^2$ e $\theta \in \mathbb{R}$ e definiamo:

$$R := e^{\theta n \cdot S} ,$$

allora, ricordando che le matrici S_i sono antisimmetriche:

$$RR^t = e^{\theta n \cdot S}(e^{\theta n \cdot S})^t = e^{\theta n \cdot S}e^{\theta n \cdot S^t} = e^{\theta n \cdot S}e^{-\theta n \cdot S} = e^{(\theta - \theta)n \cdot S} = I .$$

Per cui $R \in O(3)$. D'altra parte $detR = e^{\theta n \cdot trS} = e^0 = 1$, per cui $R \in SO(3)$. $\Box$

Si ha ovviamente il seguente corollario.

Corollario. $R \in PSO(3)$ *se e solo se esistono un versore* $n \in \mathbb{S}^2$ *e un numero* $\theta \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$R = -e^{\theta n \cdot S} .$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Dato che $PP = I$, vale $R \in PSO(3)$ se e solo se $PR \in SO(3)$, da cui segue immediatamente la prova della tesi essendo $P = -I$. $\Box$

Commenti 6.2.
(1) Ci si può chiedere se per una $R \in SO(3)$ la coppia θ, n che rappresenta R tramite il teorema 6.5 sia unica. È chiaro che se $\theta \in \mathbb{R}$ la risposta è negativa. Se restringiamo a $[0, 2\pi]$ l'intervallo di variazione di θ la risposta è ancora negativa perché una rotazione di θ riferita al versore n è la stessa cosa che una rotazione di $2\pi - \theta$ riferita al versore $-n$ (bisogna associare le rotazioni ai versori secondo la stessa orientazione, per es la "legge della mano destra"). Possiamo allora scegliere il range di θ in $[0, \pi]$. In tal caso le uniche ambiguità sono la descrizione di I che corrisponde a $\theta = 0$ e qualunque $n \in \mathbb{S}^2$ e le rotazioni di π rispetto a n e $-n$ che sono in realtà la stessa rotazione.
(2) Quanto detto sopra consente una descrizione della topologia di $SO(3)$ più approfondita. I punti di $SO(3)$ li possiamo infatti determinare dai vettori $\theta n \in \mathbb{R}^3$ con $\theta \in [0, \pi]$ e $n \in \mathbb{S}^2$. In tal modo i punti di $SO(3)$ corrispondono ai punti di una palla chiusa in $\mathbb{R}^3$ di raggio π tale che, per ogni diametro, i punti diametralmente opposti *sulla superficie della palla* sono identificati. Tali punti corrispondo alle rotazioni di θ attorno a $\pm n$ che sono, come detto la stessa cosa. Possiamo mettere una topologia su tale spazio di punti P, semplicemente inducendola da quella di $SO(3)$ mappando le basi di intorni di $SO(3)$ in P. Ogni cammino (continuo) chiuso in P che non interseca il bordo della palla, è omotopo ad un punto in P. La stessa cosa accade per cammini chiusi che arrivano fino al bordo della palla, eccetto il caso di cammini che connettono due punti diametralmente opposti posti sulla superficie della palla: questi cammini apparentemente aperti, sono chiusi per la struttura dello spazio topologico e non sono omotopi a punti: lo spazio non è semplicemente connesso. Si osservi che ognuno di tali cammini che connette due punti diametralmente opposti sulla superficie della palla, purché si avvolga una volta sola,

è banalmente omotopo al cammino corrispondente dato dallo stesso diametro che connette i due punti. Due cammini del tipo detto dati da due diametri differenti, sono sempre tra di loro omotopi ruotando un diametro verso l'altro tenendo fisso il centro della palla. In definitiva ci sono solo cammini omotopi a punti e cammini, che non lo sono, ma sono omotopi tra di loro a patto che si avvolgano una volta sola. Per cammini che si avvolgono più volte la situazione è la stessa di cammini in $\mathbb{R}^3$ privato di un retta, per cammini che si avvolgono più volte attorno a tale retta. Ciò porta a intuire che $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}$. In effetti tale fatto si può rigorosamente provare.

Esercizi 6.2.

1. Si consideri il gruppo commutativo delle traslazioni su $\mathbb{R}^n$ dato da $\mathbb{R}^n$ stesso: se $t \in \mathbb{R}^n$

$$L_t : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto x + t \in \mathbb{R}^n .$$

Mostrare che tale gruppo è un gruppo di Lie matriciale sottogruppo di $GL(n+1, \mathbb{R})$ con algebra di Lie identificabile con $\mathbb{R}^n$ stesso.
Suggerimento. Considerare $\mathbb{R}^n$ come il piano in $\mathbb{R}^{n+1}$ di equazione

$$\{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^{n+1} = 1\} .$$

Quindi considerare la classe di matrici

$$\left[\begin{array}{c|c} I & t \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] . \tag{6.11}$$

2. Mostrare che il gruppo di Galileo è un gruppo di Lie matriciale sottogruppo di $GL(5, \mathbb{R})$.
Suggerimento. Considerare la classe di matrici

$$\left[\begin{array}{c|c} \Omega_{R,V_0} & C \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] ; \tag{6.12}$$

dove $C \in \mathbb{R}^4$ è il vettore colonna con $C^t = (c, X_0)$ e

$$\Omega_{R,V_0} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline V_0 & R \end{array}\right] ; \tag{6.13}$$

dove $V_0 \in \mathbb{R}^3$ e $R \in O(3)$.

3. Mostrare che l'algebra di Lie del gruppo di Galileo è isomorfa alla somma diretta $so(3) \oplus \mathbb{R}^7$ come spazio vettoriale ma non lo e' come algebra di Lie (cioè il commutatore non soddisfa

$$[(A, t), (A', t')] = ([A, A'], 0) ,$$

dove $A, A' \in so(3)$ e $t \in \mathbb{R}^7$).

Capitolo 7

La struttura del gruppo *di Lie* $O(1,3)$.

In questa parte studieremo $O(1,3)$ come gruppo di Lie matriciale e daremo alcuni teoremi sulla rappresentazione delle sue matrici. In particolare proveremo il teorema 2.4 che afferma che le matrici di Lorentz sono decomponibili in una trasformazione di Lorentz speciale preceduta e seguita da due rotazioni spaziali.

7.1 Il gruppo di Lie matriciale $O(1,3)$.

Similmente a quanto provato per $O(n)$ dimostriamo che $O(1,3)$ è un gruppo di Lie matriciale.

Teorema 7.1. (**Proprietà elementari del gruppo di Lie** $O(1,3)$.) *Il gruppo di Lorentz*

$$O(1,3) := \{\Lambda \in M(4,\mathbb{R}) \mid \Lambda\eta\Lambda^t = \eta\}\,,$$

dove

$$\eta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7.1}$$

soddisfa le seguenti proprietà.
(1) $O(1,3)$ *è un gruppo di Lie matriciale reale* 4×4 *chiuso rispetto alla trasposizione di matrici.*
(2) *L'algebra di Lie di* $O(1,3)$*, indicata con* $o(1,3)$ *è data dallo spazio vettoriale a* 6 *dimensioni delle matrici* L*,* 4×4 *reali che soddisfano la proprietà*

$$\eta L^t \eta = -L\,. \tag{7.2}$$

(3) *$O(1,3)$ è chiuso in $\mathbb{R}^{16}$ ma non è compatto.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. (1) Il fatto che $O(1,3)$ è un sottogruppo di $GL(4,\mathbb{R})$ ed è chiuso rispetto alla trasposizione è stato provato nel teorema 2.2 Vogliamo provare che $O(1,3)$ è una sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^{16}$ usando la stessa procedura seguita nel teorema 6.3 per $O(n)$.
Consideriamo allora la definizione di $O(1,3)$. In coordinate di $\mathbb{R}^{16}$

$$\eta^{ik} - \sum_{j,r=1}^{n} x^{ij}\eta_{jr}x^{kr} = 0 .$$

Queste equazioni non sono tutte indipendenti: se si scambiano i e k si riottengono le stesse equazioni. Le equazioni indipendenti sono per esempio quelle corrispondenti alla matrice triangolare superiore di una matrice simmetrica 4×4, cioè le equazioni di sopra con la restrizione $i \leq k$. Quindi sono 10. Definiamo allora una funzione da

$$f : \mathbb{R}^{16} \to \mathbb{R}^{10}$$

con componenti (se $\eta^{rs} := \eta_{rs}$)

$$f^{ik}(x^{11}, x^{12}, \ldots, x^{44}) = \eta^{ik} - \sum_{j,r=1}^{n} x^{ij}\eta_{jr}x^{kr}$$

dove $i \leq k$. f è chiaramente differenziabile, mostriamo che i punti $\Lambda \in O(1,3) = f^{-1}(\{0\})$, dove 0 è il vettore nullo di $\mathbb{R}^{10}$, sono tali che il nucleo di df_Λ ha dimensione $16 - 10 = 6$. In base al teorema dei valori regolari ciò mostra che $O(1,3)$ è una sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^{16}$ (e quindi di $GL(4,\mathbb{R})$ che contiene $O(1,3)$ ed ha la struttura differenziabile indotta da $\mathbb{R}^{16}$) di dimensione 6. Cominciamo a provare che il nucleo di df_I ha dimensione 6. Per calcolare la dimensione del nucleo di df_I consideriamo tutte le curve differenziabili $\Lambda = \Lambda(u)$ che soddisfano $\Lambda(u)\eta\Lambda(u)^t = \eta$ e $\Lambda(0) = I$ e calcoliamo la dimensione dello spazio generato dai vettori tangenti nel punto I a tali curve. Per costruzione tale spazio è il nucleo di df_I. Da $\Lambda(u)\eta\Lambda(u)^t = \eta$ otteniamo, se $\dot{\Lambda}$ denota il vettore tangente in $u = 0$ cioè in I:

$$\dot{\Lambda}\eta + \eta\dot{\Lambda}^t = 0$$

ossia, ricordando che $\eta = \eta^t = \eta^{-1}$,

$$\dot{\Lambda} = -\eta\dot{\Lambda}^t\eta .$$

Le matrici trovate hanno la struttura:

$$L = \left[\begin{array}{c|c} 1 & c^t \\ \hline c & A \\ & \end{array}\right] , \tag{7.3}$$

dove A è una matrice antisimmetrica reale 3×3 e c un vettore colonna di $\mathbb{R}^3$. D'altra parte se L ha la struttura di sopra, la curva $\Lambda(u) := e^{uL}$, che ammette L come vettore tangente in I, soddisfa $\Lambda(u)\eta\Lambda(u)^t = \eta$: direttamente dalla definizione di esponenziale e tenendo conto che $\eta\eta = I$,

$$e^{uL}\eta(e^{uL})^t = e^{uL}\eta e^{uL^t} = e^{uL}\eta e^{uL^t}\eta\eta = e^{uL}e^{u\eta L^t\eta}\eta = e^{uL}e^{-uL}\eta = \eta$$

Dunque il nucleo di df_I è dato dallo spazio vettoriale reale delle matrici reali 4×4 che soddisfano (7.3). È facile provare che tale spazio ha dimensione 6: la matrice antisimmetrica A dipende da 3 elementi, mentre il vettore c ha 3 componenti.

Passiamo ora a considerare il generico punto $g \in O(1,3)$. Come sopra consideriamo tutte le curve differenziabili $\Lambda = \Lambda(u)$ che soddisfano $\Lambda^t(u)\eta\Lambda(u) = \eta$ (che equivale a $\Lambda(u)\eta\Lambda(u)^t = \eta$ per la chiusura del gruppo rispetto al calcolo della trasposta) e $\Lambda(0) = g$ e calcoliamo la dimensione dello spazio generato dai vettori tangenti nel punto g a tali curve. Per costruzione tale spazio è il nucleo di df_g. Da $\Lambda^t(u)\eta\Lambda(u) = \eta$ otteniamo, se $\dot{\Lambda}$ denota il vettore tangente in $u = 0$ cioè in g:

$$\dot{\Lambda}^t\eta g + g^t\eta\dot{\Lambda} = 0\,.$$

Essendo $\eta\eta = 1$ e valendo $\eta g^t\eta = g^{-1}$ da $g \in O(1,3)$, l'identità di sopra si riscrive con qualche passaggio:

$$g^{-1}\dot{\Lambda} = -\eta(g^{-1}\dot{\Lambda})^t\eta\,.$$

Questo significa che $\dot{R}$ appartiene al nucleo di df_g se e solo se

$$\dot{\Lambda} = gL$$

dove L soddisfa (7.3). Cioè L appartiene al nucleo di df_I. L'applicazione generata da g è per costruzione P_{g*} e quindi è un isomorfismo di spazi vettoriali essendo il differenziale del diffeomorfismo $P_g : GL(4,\mathbb{R}) \to GL(4,\mathbb{R})$. Quindi il nucleo di df_g ha la stessa dimensione di quello di df_I e ciò prova che siamo nelle ipotesi del teorema dei valori regolari: $O(1,3)$ è una sottovarietà embedded di $GL(4,\mathbb{R})$.

(2) In realtà la dimostrazione è stata data sopra in quanto i vettori tangenti a I in $O(1,3)$ si ottengono come i vettori tangenti per $u = 0$ delle curve $\Lambda = \Lambda(u)$ che soddisfano $\Lambda(u)\eta\Lambda(u)^t = \eta$ e $\Lambda(0) = I$. Abbiamo visto sopra che tale spazio coincide con quello delle matrici reali 4×4 che ha dimensione 6 definito da (7.2).

(3) Per la chiusura si procede esattamente come per $O(3)$, per la non compattezza è sufficiente provare che $O(1,3)$ non è limitato in $\mathbb{R}^{16}$ in quanto, in $\mathbb{R}^k$, i chiusi limitati sono tutti e soli compatti e viceversa. Si consideri a tal fine la matrice

$$\Lambda(\chi) = \begin{bmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi & 0 & 0 \\ \sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

è immediato verificare che (1) $\Lambda(\chi) \in O(1,3)$ per ogni $\chi \in \mathbb{R}$, ma anche (2) $||\lambda(\chi)||^2 = 2 + 2\cosh^2\chi + 2\sinh^2\chi \to +\infty$ per $\chi \to +\infty$. $\Box$

Passiamo a studiare $O(1,3)$. Una base di matrici di tale spazio vettoriale è data, come si prova facilmente, dalle seguenti 6 matrici. le prime tre, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ e $\mathbf{S}_3$ sono definita da, per $i = 1,2,3$

$$\mathbf{S}_i = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & S_i & \\ 0 & & & \end{array}\right] , \tag{7.4}$$

dove S_1, S_2 e S_3 sono definite in (6.7), (6.8), (6.9) rispettivamente. Le rimanenti 3 matrici dette **boosts** sono date da

$$\mathbf{K}_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] , \tag{7.5}$$

$$\mathbf{K}_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] , \tag{7.6}$$

$$\mathbf{K}_3 = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] . \tag{7.7}$$

Se poniamo $\epsilon_{ij}{}^k := \epsilon_{ijk}$, si verifica facilmente per computo diretto che valgono le seguenti relazioni di commutazione (dove c'è la regola di somma sugli indici ripetuti):

$$[\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j] = \epsilon_{ij}{}^k \mathbf{S}_k , \tag{7.8}$$
$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = -\epsilon_{ij}{}^k \mathbf{S}_k , \tag{7.9}$$
$$[\mathbf{S}_i, \mathbf{K}_j] = \epsilon_{ij}{}^k \mathbf{K}_k . \tag{7.10}$$

Tali relazioni sono spesso chiamate impropriamente, le **relazioni di commutazione del gruppo di Lorentz**.

Commenti 7.1.
(1) Se definiamo

$$\Omega_R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right] ; \tag{7.11}$$

dove $R \in O(3)$, l'applicazione $O(3) \ni R \mapsto \Omega_R \in O(1,3)$ è una *rappresentazione fedele* (cioè iniettiva) di $O(3)$ data in termini di matrici di Lorentz.
(2) Il teorema 6.5 si estende banalmente alle matrici Ω_R, con $R \in SO(3)$, nell'asserto che se $R \in SO(3)$ allora

$$\Omega_R = e^{\theta m \cdot \mathbf{S}} , \tag{7.12}$$

per qualche scelta di $\theta \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{S}^2$, e viceversa ogni matrice nel secondo membro di (7.12) è della forma (7.11) dove

$$R = e^{\theta m \cdot S} .$$

L'ultima delle relazioni di commutazione del gruppo di Lorentz ha un importante corollario che è il corrispondente del lemma 6.4 e che ci servirà tra poco. Al solito se $n \in \mathbb{S}^2$ e $A = (A_1, A_2, A_3)$ è un vettore di matrici usiamo la notazione (dove è sottintesa la somma sugli indici ripetuti):

$$n \cdot A := n^i A_i .$$

Lemma 7.1. *In riferimento alle matrici scritte sopra, vale l'identità:*

$$e^{\theta n \cdot \mathbf{S}} m \cdot \mathbf{K}\, e^{-\theta n \cdot \mathbf{S}} = \left(e^{\theta n \cdot S} m\right) \cdot \mathbf{K} , \tag{7.13}$$

per ogni coppia $n, m \in \mathbb{S}^2$ e $\theta \in \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene come segue. Si definiscano le due funzioni differenziabili a valori matriciali:

$$f_p : \theta \to e^{\theta n \cdot \mathbf{S}} \mathbf{K}_p\, e^{\theta n \cdot \mathbf{S}}$$

e

$$g_p : \theta \to \sum_k \left(e^{-\theta n \cdot S}\right)_{pk} \mathbf{K}_k .$$

Derivando f_p in θ ed usando le regole di commutazione (7.10) si prova facilmente che

$$\frac{df_p}{d\theta} = -n^i \epsilon_{pi}{}^j f_j(\theta) .$$

Nello stesso modo, usando la definizione delle matrici S_k:

$$\frac{dg_p}{d\theta} = -n^i \epsilon_{pi}{}^j g_j(\theta) .$$

Dunque le due funzioni soddisfano la stessa equazione differenziale e coincidono in $\theta = 0$ banalmente. Per il teorema di unicità globale sono la stessa funzione:

$$e^{\theta n \cdot \mathbf{S}} \mathbf{K}_p\, e^{\theta n \cdot \mathbf{S}} = \sum_k \left(e^{-\theta n \cdot S}\right)_{pk} \mathbf{K}_k$$

da cui

$$e^{\theta n\cdot \mathbf{S}} m^p \mathbf{K}_p \, e^{\theta n\cdot \mathbf{S}} = m^p \sum_k \left(e^{-\theta n\cdot S}\right)_{pk} \mathbf{K}_k$$

ossia

$$e^{\theta n\cdot \mathbf{S}} m \cdot \mathbf{K} \, e^{\theta n\cdot \mathbf{S}} = m \cdot \left(e^{-\theta n\cdot S}\mathbf{K}\right)$$

e quindi

$$e^{\theta n\cdot \mathbf{S}} m \cdot \mathbf{K} \, e^{-\theta n\cdot \mathbf{S}} = \left(e^{\theta n\cdot S} m\right) \cdot \mathbf{K} \, .$$

□

7.2 Le trasformazioni pure di Lorentz o "boosts" e la decomposizione polare del gruppo di Lorentz.

Abbiamo bisogno di qualche risultato e definizione preliminare.
Ricordiamo l'enunciato del teorema di decomposizione polare [2] specializzato al caso di dimensione finita.

Teorema 7.2. (**Teorema di decomposizione polare in dimensione finita**.) *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbb{C}$ oppure $\mathbb{R}$, dotato di prodotto scalare hermitiano, rispettivamente prodotto scalare reale simmetrico. Sia $A : V \to V$ un operatore iniettivo (equivalentemente suriettivo).*
(1) *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora:*

(i) esistono e sono unici un operatore strettamente positivo $M : V \to V$ ed un operatore unitario, rispettivamente ortogonale, $U : V \to V$ tali che sussista la decomposizione:

$$A = UM \, ,$$

(ii) esistono e sono unici un operatore strettamente positivo $M' : V \to V$ ed un operatore unitario, rispettivamente ortogonale, $U' : V \to V$ tali che sussista la decomposizione:

$$A = M'U' \, ,$$

(iii) Vale $U = U'$ e $M' = UMU^\dagger$.

(2) *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ valgono ancora (i), (ii) e (iii) di sopra con le uniche differenze che M e M' sono operatori simmetrici strettamente positivi e U, U' sono operatori ortogonali.* ♢

Definiamo preventivamente una matrice che sarà utile in tutto il seguito.

$$P(= -\eta) := \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & -I & \\ 0 & & & \end{array}\right] \, ; \tag{7.14}$$

è detta **inversione di parità**. Si osservi che la matrice tridimensionale $-I$ è stata precedentemente indicata con P. In questa sezione P indicherà invece la matrice di sopra che ne è una banale estensione. Ricordiamo che l'**inversione del tempo**

$$T(=\eta) := \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & I & \\ 0 & & & \end{array}\right] ; \tag{7.15}$$

Le matrici $I, P, T, PT = TP$ formano un sottogruppo commutativo di $O(1,3)$ che diremo **sottogruppo discreto di Lorentz**.
Ora, per prima cosa mostriamo che il teorema di decomposizione polare per operatori su $\mathbb{R}^4$ applicato a matrici di Lorentz produce una coppia di matrici di Lorentz. Tale risultato non è affatto banale: se $\Lambda \in O(1,3)$ il teorema di decomposizione polare per operatori su $\mathbb{R}^4$ (con prodotto scalare positivo usuale) assicura che (in una delle due versioni)

$$\Lambda = MU$$

dove $M = M^t$ e $M > 0$ e $U \in O(4)$. Niente assicura a priori che $M, U \in O(1,3)$! In realtà vale il seguente teorema.

Teorema 7.3. (**Decomposizione polare di** $O(1,3)$.) *Sia $\Lambda \in O(1,3)$ allora vale quanto segue:*
(1) *esiste ed è unica una coppia di matrici $\Lambda_p, \Omega \in M(4,\mathbb{R})$ tali che*

$$\Lambda = \Lambda_p \Omega \tag{7.16}$$

unitamente a $\Lambda_p = \Lambda_p^t$, $\Lambda_p > 0$ e $\Omega \in O(4)$;
(2) *esiste ed è unica una coppia di matrici $\Lambda'_p, \Omega' \in M(4,\mathbb{R})$ tali che*

$$\Lambda = \Omega' \Lambda'_p \tag{7.17}$$

unitamente a $\Lambda'_p = {\Lambda'}_p^t$, $\Lambda'_p > 0$ e $\Omega' \in O(4)$;
(3) *vale in realtà:*

$$\Omega = \Omega' , \tag{7.18}$$

$$\Lambda'_p = \Omega^t \Lambda_p \Omega ; \tag{7.19}$$

(4) *le decomposizioni in (1) e (2) sono decomposizioni all'interno di $O(1,3)$ in quanto risulta*

$$\Lambda_p, \Lambda'_p, \Omega \in O(1,3) ,$$

ed ulteriormente:
(i) $\Omega = \Omega_R$, oppure

(ii) $\Omega = T\Omega_R$, *oppure*
(ii) $\Omega = P\Omega_R$, *oppure*
(iv) $\Omega = PT\Omega_R$,
e Ω_R *è una pura rotazione speciale spaziale data dalla (7.11):*

$$\Omega_R = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right] ;$$

dove $R \in SO(3)$.
(5) *le matrici* Λ_p, Λ'_p *godono delle seguenti proprietà:*
(i) $det\,\Lambda_p = det\,\Lambda'_p = 1$,
(ii) $\Lambda_p, \Lambda'_p \in O(1,3)\uparrow$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Riguardo ai punti (1),(2) e (3) la dimostrazione segue immediatamente dal teorema di decomposizione polare (teorema 7.2) per operatori sullo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare $(u|v) = \sum_{i=1}^4 u^i v^i$. Per provare la prima parte del punto(4) procediamo come segue. Notiamo che, dato che esiste Λ_p^{-1} per la stretta positività di Λ_p, è sufficiente provare che $\Lambda_p \in O(1,3)$. Ciò implica subito che $\Omega = \Lambda_p^{-1}\Lambda \in O(1,3)$ perché prodotto di due elementi di $O(1,3)$ e $\Lambda'_p = \Omega^t\Lambda_p\Omega \in O(1,3)$ perchè prodotto di tre elementi di $O(1,3)$. Quindi proviamo che $\Lambda_p \in O(1,3)$.
Da $O(1,3) \ni \Lambda = \Lambda_p\Omega$ e tenendo conto che Λ_p è simmetrica troviamo che

$$\Lambda_p\Omega\eta\Omega^t\Lambda_p = \eta$$

e quindi

$$\Omega\eta\Omega^t = \Lambda_p^{-1}\eta\Lambda_p^{-1} . \quad (7.20)$$

Eseguendo il calcolo dell'inversa ad ambo membri e tenendo conto che $\Omega^t = \Omega^{-1}$ e $\eta\eta = I$, si ha

$$\Omega\eta\Omega^t = \Lambda_p\eta\Lambda_p . \quad (7.21)$$

Uguagliando i secondi membri di (7.20) e (7.21) ed usando ancora $\eta\eta = I$ si ha subito

$$\eta\Lambda_p^2\eta = \Lambda_p^{-2} . \quad (7.22)$$

Notiamo che $\eta\Lambda_p^2\eta \geq 0$ ed è simmetrico per costruzione per cui ammette un'unica radice quadrata. Quest'ultima deve essere $\eta\Lambda_p\eta$ in quanto $\eta\Lambda_p\eta$ è simmetrica e positiva e vale $(\eta\Lambda_p\eta)^2 = \eta\Lambda_p\eta\eta\Lambda_p\eta = \eta\Lambda_p^2\eta$. D'altra parte l'unica radice quadrata di Λ_p^{-2} (che è simmetrica e positiva) è Λ_p^{-1} (che è simmetrica e positiva). In definitiva, estraendo le radici quadrate da ambo membri di (7.22) otteniamo:

$$\eta\Lambda_p\eta = \Lambda_p^{-1} ,$$

che equivale, moltiplicando a destra per Λ_p ed a sinistra per η (usando $\eta\eta = I$), a

$$\Lambda_p \eta \Lambda_p^t = \eta ,$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\Lambda_p = \Lambda_p^t$. Abbiamo ottenuto che $\Lambda_p \in O(1,3)$ con ciò, come detto è provata la prima parte di (4). Per la seconda parte, è sufficiente notare che in base a alla prima parte, $\Omega \in O(1,3) \cap O(4)$, ossia $\Omega\eta\Omega^t = \eta$ e $\Omega\Omega^t = I$. Imponendo entrambe le condizioni su una generica matrice reale 4×4 risulta immediatamente che essa deve avere la forma

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

dove $R \in O(3)$ da cui segue immediatamente la tesi tenendo conto del teorema 6.4 Tale risultato completa la dimostrazione di (4).
La prova di (5) è immediata. Consideriamo solo Λ_p senza perdere generalità. La positività di Λ_p implica che $\Lambda^0{}_0 \geq 0$ per cui $\Lambda_p \in O(1,3)\!\uparrow$. La stessa positività implica che tutti gli autovalori di Λ_p siano non negativi per cui $\det \Lambda_p \geq 0$, ma dovendo essere $\det \Lambda_p = \pm 1$ (perchè $\Lambda_p \eta \Lambda_p^t = \eta$ da cui $(\det \Lambda_p)^2 = 1$) deve valere $\det \Lambda_p = 1$. $\Box$

Definizione 7.1. (**Trasformazioni Pure di Lorentz.**) Una trasformazione $\Lambda_p \in O(1,3)$ è detta **trasformazione** o **matrice pura di Lorentz** se soddisfa le due condizioni:
(a)

$$\Lambda_p = \Lambda_p^t ,$$

(b)

$$\Lambda_p > 0 .$$

Equivalentemente una trasformazioni di Lorentz è pura se è il fattore simmetrico positivo della decomposizione polare di una matrice di Lorentz. $\diamondsuit$

Commenti 7.2.
(1) È chiaro che, essendo Λ_p simmetrica e non singolare $\Lambda_p > 0$ equivale a $\Lambda_p \geq 0$ usando la decomposizione spettrale.
(2) È chiaro che le trasformazioni pure sono tutte e sole le matrici Λ_p del teorema 7.3 che si ottengono decomponendo polarmente tutte le matrici di Lorentz. Si tenga conto del fatto che la decomposizione polare di una trasformazione pura coincide con la stessa matrice da decomporre per l'unicità della decomposizione.
(3) In particolare quindi ogni trasformazione pura soddisfa $\det \Lambda_p = 1$ e $\Lambda_p \in O(1,3)\!\uparrow$.
Passiamo a dare un primo teorema di rappresentazione delle trasformazioni pure di Lorentz. Tale teorema ed il successivo servirà sia a studiare le componenti connesse del gruppo di Lorentz sia a dare un teorema di rappresentazione del gruppo di Lorentz.

Teorema 7.4. (**Rappresentazione delle trasformazioni pure**.) *Le matrici pure di Lorentz soddisfano le seguenti proprietà:*
(a) *il loro insieme coincide con la classe di matrici di $M(4,\mathbb{R})$ della forma:*

$$\left[\begin{array}{c|c} \gamma & B^t \\ \hline B & I+ BB^t/(1+\gamma) \end{array}\right] , \tag{7.23}$$

dove

$$\gamma = \sqrt{1+B^2} \tag{7.24}$$

e $B \in \mathbb{R}^3$ è un qualsiasi vettore colonna,
(b) *se Λ_p è definita come in (7.23), $R \in SO(3)$ e Ω_R è definita da (7.11), allora*

$$\Omega_R \Lambda_p \Omega_R^t = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & (RB)^t \\ \hline RB & I+ RB(RB)^t/(1+\gamma) \end{array}\right] , \tag{7.25}$$

dove $\gamma = \sqrt{1+(RB)^2}$ $(= \sqrt{1+B^2})$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Cominciamo con la prova di (b). Tale prova si ottiene facendo il calcolo diretto del prodotto $\Omega_R \Lambda_p \Omega_R^t$ per una generica $R \in M(4,\mathbb{R})$. Tale prodotto fornisce immediatamente il secondo membro di (7.25) dove però $\gamma = \sqrt{1+B^2}$. Se ulteriormente vale $R \in SO(3)$, il modulo di B coincide con quello di RB e ciò non altera il valore di γ.
(a) Partendo da una generica matrice di $M(4,\mathbb{R})$ della forma

$$\Gamma := \left[\begin{array}{c|c} \gamma & c^t \\ \hline b & A \end{array}\right] , \tag{7.26}$$

dove $b, c \in \mathbb{R}^3$ sono due qualsiasi vettori colonna e $A \in M(3,\mathbb{R})$ è arbitraria, la simmetria di Γ implica che $b = c$, il cui valore comune lo indicheremo con B, e $A = A^t$, la richiesta di positività della matrice Γ implica che $\gamma > 0$ e $A > 0$. Infine l'imposizione della condizione di Lorentz $\Gamma\eta\Gamma^t = \eta$ porta alle condizioni:
(1) $\gamma = \pm\sqrt{1+B^2}$ in cui si deve scegliere il segno positivo per la positività di gamma;
(2) $AB = \gamma B$;
(3) $AA^t = I + BB^t$ che equivale a $A^2 = I + BB^t$ per la simmetria di A.
Dall'ultima equazione e tenuto conto del fatto che $A > 0$, si evince che A deve coincidere con la radice quadrata di $I + BB^t$ che è univocamente definita come sappiamo dalla sezione precedente. Tenendo conto di (1), una matrice evidentemente (strettamente) positiva il cui

quadrato è $I + BB^t$ è $I + BB^t/(1+\gamma)$ e che soddisfa anche (2). Questa è dunque la soluzione. Abbiamo provato che le matrici pure hanno la forma (7.23). D'altra parte, se $\Lambda_p \in O(1,3)$ ha la forma (7.23), è immediato provare che si tratta di una matrice simmetrica che soddisfa il vincolo $\Lambda_p \eta \Lambda_p^t = \eta$. Mostriamo che tale matrice è anche necessariamente (strettamente) positiva e ciò conclude la dimostrazione. Se Λ_p ha la forma (7.25) con $B \neq 0$ (in caso contrario la tesi è ovviamente vera), usando la formula (7.25) con una $R \in SO(3)$ opportuna possiamo ruotare il vettore B in modo che abbia solo la prima componente non nulla. È chiaro che, essendo Ω_R non singolare, la matrice $\Omega_R \Lambda_p \Omega_R^t$ è (strettamente) positiva se e solo se Λ_p è (strettamente) positiva. Quindi la tesi si riduce a provare che una matrice della forma

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \gamma & B & 0 & 0 \\ \hline B & (1+\gamma+B^2)/(1+\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \tag{7.27}$$

è positiva dove $B \in \mathbb{R}$. Si noti che $B^2 = \gamma^2 - 1$ per costruzione, per cui la matrice di sopra è scrivibile come:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \gamma & B & 0 & 0 \\ \hline B & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \tag{7.28}$$

Il calcolo degli autovalori fornisce oltre a 1 contato due volte

$$\lambda_\pm = \gamma \pm |B|\,.$$

Essendo $\gamma = \sqrt{1+B^2} > |B|$ risulta $\lambda_\pm > 0$, per cui tutti gli autovalori sono strettamente positivi e la matrice è strettamente positiva. $\Box$

Nota 7.1. Supponiamo che Λ_p sia la matrice di Lorentz pura che connette coordinate minkowskiane dei riferimenti inerziali $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$:

$$x'^i = C^i + {\Lambda_p}^i{}_j x^j\,.$$

Il vettore $B \in \mathbb{R}^3$ è costituito dalle componenti di $\overrightarrow{V}/c$ nelle coordinate di $\mathscr{F}'$, dove $V = c\gamma\partial_{\mathscr{F}'} + \overrightarrow{V}$ è la quadri velocità di $\mathscr{F}$. Nella componente temporale, il fattore γ è proprio ${\Lambda_p}^0{}_0$. In questo senso e con notazione impropria, si può scrivere

$$\Lambda_p = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & \overrightarrow{V}^t/c \\ \hline \overrightarrow{V}/c & I + \overrightarrow{V}\,\overrightarrow{V}^t/[c^2(1+\gamma)] \end{array}\right], \tag{7.29}$$

Similmente, se v denota il vettore colonna di $\mathbb{R}^3$ le cui componenti sono le componenti della velocità di trascinamento di $\mathscr{F}$ in $\mathscr{F}'$ allora si può scrivere

$$\Lambda_p = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma v^t/c \\ \hline \gamma v/c & I + \gamma^2 v v^t/[c^2(1+\gamma)] \end{array} \right], \tag{7.30}$$

dove la relazione tra γ e v come già provato (vedi sotto la definizione 4.3) è $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.
Un'ultima parametrizzazione si ottiene come segue partendo direttamente da (7.23). L'equazione (7.24) implica che possiamo parametrizzare γ e $|B|$ come segue:

$$\gamma = \cosh\chi\,, \tag{7.31}$$
$$|B| = \sinh\chi\,, \tag{7.32}$$

dove $\chi \in [0, +\infty)$. Introducendo il versore $n \in \mathbb{S}^2$, la corrispondenza $(\chi, n) \mapsto B := (\sinh\chi)n$ è biunivoca eccetto per $B = 0$ che corrisponde a tutti i valori di n e $\chi = 0$. Infine notiamo che, essendo $\sinh^2\chi = \cosh^2\chi - 1$,

$$BB^t/(1+\gamma) = (\sinh^2\chi)nn^t/(1+\cosh\chi) = (\cosh\chi - 1)nn^t\,.$$

In definitiva, le trasformazioni pure le possiamo rappresentare come

$$\Lambda_p = \left[\begin{array}{c|c} \cosh\chi & (\sinh\chi)n^t \\ \hline (\sinh\chi)n & I + (\cosh\chi - 1)nn^t \end{array} \right], \tag{7.33}$$

dove $\chi \in [0, +\infty)$ e $n \in \mathbb{S}^2$ ed, eccetto per $\chi = 0$, la corrispondenza sopra scritta tra trasformazioni pure di Lorentz e parametri $(\chi, n) \in [0, +\infty) \times \mathbb{S}^2$ è biunivoca.
In termini di velocità di trascinamento di $\mathscr{F}$ rispetto a $\mathscr{F}'$, con le convenzioni usate sopra, si ha subito che

$$v/|v| = n\,, \tag{7.34}$$
$$|v|/c = \tanh\chi\,. \tag{7.35}$$

L'ultima rappresentazione trovata nell'osservazione di sopra può anche essere scritta in altro modo.

Teorema 7.5. (**Rappresentazione esponenziale delle trasformazioni pure**.) *Le trasformazioni pure di Lorentz sono tutte e sole le matrici della forma*

$$e^{\chi n \cdot \mathbf{K}}\,, \tag{7.36}$$

dove $n \in \mathbb{S}^2$ e $\chi \in \mathbb{R}$. Inoltre la corrispondenza tra matrici pure di Lorentz e coppia di parametri (χ, n) ad esse associate è biunivoca se $n \in \mathbb{S}^2$ e $\chi > 0$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. In base all'osservazione di sopra,è sufficiente provare che, per ogni $(\chi, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$:

$$e^{\chi n \cdot \mathbf{K}} = \left[\begin{array}{c|c} \cosh\chi & (\sinh\chi) n^t \\ \hline (\sinh\chi) n & I + (\cosh\chi - 1) n n^t \end{array}\right]. \tag{7.37}$$

Per provare ciò indichiamo con Λ' e Λ'' il primo e secondo membro della (7.37). Vogliamo provare che

$$\Lambda' = \Lambda''\,.$$

A tale scopo notiamo che per ogni $n \in \mathbb{S}^2$ esiste $R \in SO(3)$ tale che $Rn = e_1$ primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$. Consideriamo allora Ω_R associata a R secondo la (7.11). Il calcolo diretto (o passando per (b) del teorema 7.4) prova subito che

$$\Omega_R \Lambda'' \Omega_R^t = \left[\begin{array}{c|c} \cosh\chi & (\sinh\chi) e_1^t \\ \hline (\sinh\chi) e_1 & I + (\cosh\chi - 1) e_1 e_1^t \end{array}\right]. \tag{7.38}$$

In altre parole:

$$\Omega_R \Lambda'' \Omega_R^t = \begin{bmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi & 0 & 0 \\ \sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.39}$$

Consideriamo ora Λ'. Usando lo sviluppo dell'esponenziale non ci sono difficoltà a provare che

$$\Omega_R \Lambda' \Omega_R^t = e^{\chi n \cdot \Omega_R \mathbf{K} \Omega_R^t}\,.$$

Usando (7.12) ed il lemma 6.1 nel secondo membro abbiamo immediatamente che

$$\Omega_R \Lambda' \Omega_R^t = e^{\chi (Rn) \cdot \mathbf{K}}\,,$$

ossia

$$\Omega_R \Lambda' \Omega_R^t = e^{\chi e_1 \cdot \mathbf{K}} = e^{\chi \mathbf{K}_1}\,.$$

Infine il calcolo esplicito dell'esponenziale $e^{\chi \mathbf{K}_1}$ (per esempio con la solita procedura basata sul teorema di unicità delle soluzioni di equazioni differenziali) mostra che

$$\Omega_R \Lambda' \Omega_R^t = e^{\chi \mathbf{K}_1} = \begin{bmatrix} \cosh\chi & \sinh\chi & 0 & 0 \\ \sinh\chi & \cosh\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.40}$$

Per confronto con (7.39) abbiamo ottenuto che

$$\Omega_R \Lambda' \Omega_R^t = \Omega_R \Lambda'' \Omega_R^t ,$$

che implica subito, moltiplicando a sinistra per Ω_R^t e a destra per Ω_R

$$\Lambda' = \Lambda'' .$$

la dimostrazione è conclusa. $\Box$

Le trasformazioni pure di Lorentz includono le ben note cosiddette *trasformazioni speciali di Lorentz* che si ottengono quando la velocità di trascinamento è parallela ad uno dei tre assi delle coordinate spaziali minkowskiane. Abbiamo già incontrato le trasformazioni speciali lungo l'asse x^3 varie volte nelle sezioni precedenti.

Definizione 7.2. (**Trasformazioni speciali di Lorentz**.) Una trasformazione pura di Lorentz tale che, in riferimento alla rappresentazione del teorema 6.4, $n = e_i$ (i-esimo versore di $\mathbb{R}^3$) è detta **trasformazione speciale di Lorentz lungo l'asse** x^i. $\diamondsuit$

Se v è il valore scalare con segno della velocità di trascinamento di $\mathscr{F}$ rispetto a $\mathscr{F}'$ dotati di coordinate minkowskiane in modo tale che la trasformazione di coordinate

$$x'^i = \Lambda^i{}_j x^j$$

sia una trasformazione speciale lungo l'asse $i-esimo$, risulta subito che, posto $x^0 = ct$ e $x'^0 = ct'$ e $j \neq i$,

$$t' = \gamma(t + \frac{v}{c^2} x^i) , \tag{7.41}$$

$$x'^i = \gamma(x^i + vt) , \tag{7.42}$$

$$x'^j = x^j . \tag{7.43}$$

dove al solito $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Commenti 7.3.
(1) Come già osservato precedentemente le trasformazioni di Lorentz non preservano gli angoli tra i versori. Tuttavia ciò accade per trasformazioni speciali di Lorentz: in entrambi i riferimenti connessi da una trasformazione speciale di Lorentz, la terna dell'altro riferimento individuerà una terna in movimento che sarà ancora ortogonale. Si osservi che ciò non accade per trasformazioni pure generiche per cui non si può affermare che le trasformazioni pure sono le trasformazioni che corrispondono ai moti relativi di terne inerziali *ad assi paralleli*. L'unica affermazione fisicamente sensata è che, in base al teorema di decomposizione delle matrici di Lorentz, le trasformazioni pure sono le trasformazioni di Lorentz che *non contengono rotazioni*. A differenza della situazione classica ciò non implica automaticamente che le terne di assi rappresentate nei rispettivi spazi

di quiete "procedano ad assi paralleli".
(2) È immediato provare che:
le trasformazioni speciali di Lorentz lungo l'asse i-esimo costituiscono un sottogruppo ad un parametro del gruppo di Lorentz generato dal boost $\mathbf{K}_i$ *.*
Tuttavia, a causa della relazione di commutazione

$$[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = \epsilon_{ij}{}^k \mathbf{S}_k \,,$$

la composizione di due trasformazioni speciali lungo assi differenti *non è nemmeno una trasformazione pura*! L'insieme delle trasformazioni pure di Lorentz *non è un sottogruppo* del gruppo di Lorentz.
Questo risultato ha conseguenze fisiche non banali, per esempio nel fenomeno della *precessione di Thomas* in cui in un riferimento inerziale $\mathscr{F}$ si descrive una terna di assi solidale ad un altro riferimento inerziale $\mathscr{F}'$ (e quindi in moto in $\mathscr{F}$) come se "ruotasse", anche se tale terna soddisfa una definizione relativisticamente invariante di terna *non rotante*.
(3) In riferimento alla rappresentazione delle trasformazioni pure discussa sopra:

$$\Lambda_p = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & \gamma v^t/c \\ \hline \gamma v/c & I + \gamma^2 v v^t/[c^2(1+\gamma)] \end{array}\right] ,$$

si verifica subito che (essendo immutato il valore di γ in tutti e tre i casi)

$$P\Lambda_p P = \left[\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma v^t/c \\ \hline -\gamma v/c & I + \gamma^2 (-v)(-v^t)/[c^2(1+\gamma)] \end{array}\right] ,$$

e

$$T\Lambda_p T = \left[\begin{array}{c|c} -\gamma & -\gamma v^t/c \\ \hline -\gamma v/c & I + \gamma^2 (-v)(-v^t)/[c^2(1+\gamma)] \end{array}\right] ,$$

mentre

$$PT\Lambda_p TP = \left[\begin{array}{c|c} -\gamma & \gamma v^t/c \\ \hline \gamma v/c & I + \gamma^2 v v^t/[c^2(1+\gamma)] \end{array}\right] .$$

Il significato fisico di queste identità è ovvio se si tiene conto che sia l'inversione del tempo e sia l'inversione di parità devono cambiare segno al vettore velocità. Si osservi che come conseguenza di quanto ottenuto e del fatto che $TT = PP = TPTP = I$, si ha che T, P, TP *non commutano* con le matrici del gruppo di Lorentz quando queste contengano trasformazioni pure di Lorentz nella decomposizione polare.

7.3 Teoremi di decomposizione e rappresentazione del gruppo di Lorentz.

Per concludere possiamo enunciare e provare un teorema di rappresentazione del gruppo di Lorentz ortocrono proprio ed in particolare possiamo provare il teorema 3.1.

Teorema 7.6. (**Rappresentazione del gruppo di Lorentz ortocrono proprio**.) *Le matrici $\Lambda \in SO(1,3)\uparrow$ sono tutte e sole le matrici di $M(4,\mathbb{R})$ della forma*

$$\Lambda = \Omega_R \Lambda_p \,, \tag{7.44}$$

per ogni scelta di $R \in SO(3)$ e per ogni trasformazione pura di Lorentz Λ_p; ovvero

$$\Lambda = e^{\theta n \cdot \mathbf{S}} e^{\chi m \cdot \mathbf{K}} \,, \tag{7.45}$$

per ogni scelta di $n, m \in \mathbb{S}^2$, $\theta, \chi \in \mathbb{R}$.
Equivalentemente, le matrici $\Lambda \in SO(1,3)\uparrow$ sono tutte e sole le matrici di $M(4,\mathbb{R})$ della forma

$$\Lambda = \Lambda'_p \Omega_{R'} \,, \tag{7.46}$$

per ogni scelta di $R' \in SO(3)$ e per ogni trasformazione pura di Lorentz Λ'_p; ovvero

$$\Lambda = e^{\chi' m' \cdot \mathbf{K}} e^{\theta' n' \cdot \mathbf{S}} \,, \tag{7.47}$$

per ogni scelta di $n', m' \in \mathbb{S}^2$, $\theta', \chi' \in \mathbb{R}$. Inoltre valgono i seguenti fatti.
(1) *In entrambi i casi le coppie (m, χ) e (m', χ') sono determinate biunivocamente da $I \neq \Lambda \in SO(1,3)\uparrow$ purchè ci si restringa all'insieme $\mathbb{S}^2 \times (0, +\infty)$.*
(2) *In entrambi i casi le coppie (θ, n) e (θ', n') sono determinate biunivocamente da $I \neq \Lambda \in SO(1,3)\uparrow$ purchè ci si restringa all'insieme $\mathbb{S}^2 \times (0, \pi]$ e con l'eccezione che (n, π) e $(-n, \pi)$ producono lo stesso primo fattore nel secondo membro di (7.45), e rispettivamente (n', π') e $(-n', \pi')$ che producono lo stesso secondo fattore nel secondo membro di (7.47).*
(3) *Per una fissata $\Lambda \in SO(1,3)\uparrow$, $\Lambda \neq I$, in riferimento alle decomposizioni (7.45) e (7.47) e con le restrizioni in (1) e (2) valgono le identificazioni*

$$\begin{aligned} n' &= n \,, & (7.48)\\ \theta' &= \theta \,, & (7.49)\\ m' &= e^{\theta n \cdot S} m \,, & (7.50)\\ \chi' &= \chi \,. & (7.51) \end{aligned}$$

◊

Dimostrazione. Se $\Lambda \in SO(1,3)\uparrow$, per il teorema 7.3, $\Lambda = \Lambda_p \Omega$ dove Λ_p è pura. Si noti che $\Lambda_p^{-1}\Lambda \in SO(1,3)\uparrow$ per il punto (5) del teorema 7.3 ed essendo $SO(1,3)\uparrow$ un gruppo. Allora

$\Omega = \Lambda_p^{-1}\Lambda \in SO(1,3)\!\uparrow$ e deve essere necessariamente della forma Ω_R (7.11) con $R \in SO(3)$. Usando (7.12) ed il teorema 7.5 abbiamo infine che:

$$\Lambda = e^{\theta m\cdot \mathbf{S}} e^{\chi n\cdot \mathbf{K}}$$

per qualche $\theta, \chi \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{S}^2$. Se, viceversa consideriamo una matrice della forma $\Lambda = e^{\theta m\cdot \mathbf{S}} e^{\chi n\cdot \mathbf{K}}$ il teorema 7.5 assicura che $e^{\chi n\cdot \mathbf{K}} \in SO(1,3)\!\uparrow$. Inoltre $e^{\theta m\cdot \mathbf{S}}$ è della forma (7.11) con $R = e^{\theta m\cdot S} \in SO(3)$ per cui è immediato avere che $e^{\theta m\cdot \mathbf{S}} \in SO(1,3)\!\uparrow$ Essendo $SO(1,3)\!\uparrow$ un gruppo, $\Lambda = e^{\theta m\cdot \mathbf{S}} e^{\chi n\cdot \mathbf{K}} \in SO(1,3)\!\uparrow$. La dimostrazione si esegue nello stesso modo con le debite differenze considerando una decomposizione $\Lambda = \Omega\Lambda_p$. Il punto (1) segue dall'osservazione (1) dopo il teorema 6.5 e dall'unicità dei fattori della decomposizione polare del teorema 7.3. Il punto (2) segue dal teorema 7.5 e dall'unicità dei fattori della decomposizione polare del teorema 7.3. Il punto (3) segue dal punto (3) del teorema 7.3. $\Box$

Segue immediatamente un importante conseguenza che presentiamo come teorema.

Teorema 7.7. (**Decomposizione in trasformazioni speciali e rotazioni**.) *Se $\Lambda \in SO(1,3)\!\uparrow$ allora esistono $R, R' \in SO(3)$ ed una trasformazione speciale di Lorentz lungo il terzo asse Λ_3 tali che:*

$$\Lambda = \Omega_R \Lambda_3 \Omega_{R'}\ ,$$

ovvero in altri termini

$$\Lambda = e^{\theta n\cdot \mathbf{S}} e^{\chi \mathbf{K}_3} e^{\theta' n'\cdot \mathbf{S}}\ ,$$

per qualche $n, n' \in \mathbb{S}^2$, $\theta, \theta', \chi \in \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. In base al teorema precedente, se $\Lambda \in SO(1,3)\!\uparrow$, $\Lambda = e^{\theta n\cdot \mathbf{S}} e^{\chi m\cdot \mathbf{K}}$. Sia $B \in SO(3)$ tale che $Bm = e_3$. Allora usando il lemma 7.1 e la (7.12):

$$e^{\chi m\cdot \mathbf{K}} = e^{\chi (Be_3)\cdot \mathbf{K}} = e^{\Omega_B \chi e_3\cdot \mathbf{K} \Omega_B^t} = \Omega_B e^{\chi e_3\cdot \mathbf{K}} \Omega_B^t = \Omega_B e^{\chi K_3} \Omega_{B^t}\ .$$

Di conseguenza, ponendo $\Omega_R = e^{\theta n\cdot \mathbf{S}}$,

$$\Lambda = e^{\theta n\cdot \mathbf{S}} \Omega_B e^{\chi K_3} \Omega_{B^t} = \Omega_R \Omega_B e^{\chi K_3} \Omega_B^t\ .$$

Dato che $A \mapsto \Omega_A$ è una rappresentazione gruppale, $\Omega_R\Omega_B = \Omega_{RB}$ e dunque

$$\Lambda = \Omega_{RB} e^{\chi K_3} \Omega_{B^t}\ .$$

Ridefinendo le matrici di $SO(3)$: RB come R e B^t come R' segue banalmente la tesi. $\Box$

Nota 7.2. Il teorema provato ha come conseguenza il teorema 3.1. Infatti se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ sono sistemi di riferimento inerziali, scelti due sistemi di coordinate minkowskiane $\phi \in \mathscr{F}$,$\phi' \in \mathscr{F}'$, la trasformazione di Poincaré che lega tali sistemi di coordinate, ossia $\phi' \circ \phi^{-1}$, sarà della forma

$$z'^i = C^i + \Gamma^i_j z^j\ .$$

dove $\Gamma \in O(1,3){\uparrow}$ e $C^i \in \mathbb{R}$. Ridefinendo le coordinate in $\mathscr{F}'$ come

$$y^i = (\Omega_R)^i{}_j(z'^j - C^j)$$

dove $R \in O(3)$, il nuovo sistema di coordinate sarà ancora solidale con $\mathscr{F}'$ e varrà

$$y^i = \Lambda^i{}_j z^j \ ,$$

dove $\Lambda = \Omega_R \Gamma$. Ci sono due possibilità: $\det \Gamma = 1$ ed in tal caso $\Lambda \in SO(1,3){\uparrow}$ con la scelta banale $R = I$, oppure $\det \Gamma = -1$; in tal caso, scegliendo $R = -I$, risulta $\Lambda \in SO(1,3){\uparrow}$. In definitiva abbiamo trovato due sistemi di coordinate minkowskiane solidali con $\mathscr{F}$ e $\mathscr{F}'$ e connessi da una trasformazione di Lorentz ortocrona propria.

$$y^i = \Lambda^i{}_j z^j \ ,$$

con $\Lambda \in SO(1,3){\uparrow}$. Applicando il teorema 7.7 a Λ e definendo $x'^i := (\Omega_{R^t})^i{}_j y^j$ e $x^i = (\Omega_{R'})^i{}_j z^j$, per costruzione i due nuovi sistemi di coordinate minkowskiane sono ancora solidali con $\mathscr{F}'$ e $\mathscr{F}$ e inoltre vale

$$x'^i = \left(e^{\chi \mathbf{K}_3}\right)^i{}_j x^j \ ,$$

cioè la trasformazione di coordinate è una trasformazione speciale lungo il terzo asse.

7.4 Le componenti connesse del gruppo di Lorentz.

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di $O(1,3)$:

$$O(1,3)_+{\uparrow} \ := \ \{\Lambda \in O(1,3) \,|\, \det \Lambda > 0 \ , \ \Lambda^0{}_0 > 0\} \ , \tag{7.52}$$
$$O(1,3)_-{\uparrow} \ := \ \{\Lambda \in O(1,3) \,|\, \det \Lambda < 0 \ , \ \Lambda^0{}_0 > 0\} \ , \tag{7.53}$$
$$O(1,3)_+{\downarrow} \ := \ \{\Lambda \in O(1,3) \,|\, \det \Lambda > 0 \ , \ \Lambda^0{}_0 < 0\} \ , \tag{7.54}$$
$$O(1,3)_-{\downarrow} \ := \ \{\Lambda \in O(1,3) \,|\, \det \Lambda < 0 \ , \ \Lambda^0{}_0 < 0\} \ . \tag{7.55}$$

È chiaro che si tratta di insiemi *disgiunti* per costruzione, inoltre

$$O(1,3) := O(1,3)_+{\uparrow} \cup O(1,3)_-{\uparrow} \cup O(1,3)_+{\downarrow} \cup O(1,3)_-{\downarrow} \tag{7.56}$$

in quanto se $\Lambda \in O(1,3)$, come più volte notato, $\det \Lambda = \pm 1$ ed ulteriormente $\Lambda^0_0 \geq +1$ oppure $\Lambda^0_0 \leq -1$ per il il teorema 2.3. Per gli stessi motivi possiamo equivalentemente riscrivere il membro di destra delle definizioni di sopra come:

$$O(1,3)_+{\uparrow} \ := \ \{\Lambda \in O(1,3) \,|\, \det \Lambda = +1 \ , \ \Lambda^0{}_0 > +1\} \ , \tag{7.57}$$
$$O(1,3)_-{\uparrow} \ := \ \{\Lambda \in O(1,3) \,|\, \det \Lambda = -1 \ , \ \Lambda^0{}_0 > +1\} \ , \tag{7.58}$$
$$O(1,3)_+{\downarrow} \ := \ \{\Lambda \in O(1,3) \,|\, \det \Lambda = +1 \ , \ \Lambda^0{}_0 < -1\} \ , \tag{7.59}$$
$$O(1,3)_-{\downarrow} \ := \ \{\Lambda \in O(1,3) \,|\, \det \Lambda = -1 \ , \ \Lambda^0{}_0 < -1\} \ . \tag{7.60}$$

Notiamo ancora che $O(1,3)_+\uparrow$ è un sottogruppo di $O(1,3)$ come è immediato provare tenendo conto che risulta essere l'intersezione del sottogruppo ortocrono $O(1,3)\uparrow$ e del sottogruppo $SO(1,3)$ costituito dalle matrici di Lorentz con determinante $+1$ (il fatto che tale insieme sia un sottogruppo è di verifica immediata).
I rimanenti sottoinsiemi $O(1,3)_-\uparrow, O(1,3)_+\downarrow, O(1,3)_-\downarrow$ non sono sottogruppi perché non contengono I per definizione.
Tenendo conto del fatto che $TT = PP = I$ dove l'inversione del tempo T e l'inversione di parità P sono definite in (7.15) (ovvero nel teorema 2.3) e (7.14) segue subito che, con ovvie notazioni:

$$\begin{aligned} O(1,3)_-\uparrow &= PO(1,3)_+\uparrow\,, \\ O(1,3)_+\downarrow &= PTO(1,3)_+\uparrow\,, \\ O(1,3)_-\downarrow &= TO(1,3)_+\uparrow\ . \end{aligned}$$

Il risultato più importante è comunque che i 4 sottoinsiemi di $O(1,3)$ sopra definiti sono le *componenti connesse* del gruppo di Lorentz:

Teorema 7.8. (**Componenti connesse del gruppo di Lorentz**.) *I quattro sottoinsiemi di $O(1,3)$ definiti in (7.57)-(7.60) costituiscono le componenti connesse del gruppo di Lorentz di cui solo*

$$SO(1,3)\uparrow := O(1,3)_+\uparrow$$

*detto (***sotto***)* **gruppo ortocrono proprio** *o (***sotto***)* **gruppo ortocrono speciale** *è sottogruppo di $O(1,3)$.*
Valgono infine le relazioni:

$$O(1,3)_-\uparrow = PSO(1,3)\uparrow\,, \tag{7.61}$$

$$O(1,3)_+\downarrow = PTSO(1,3)\uparrow\,, \tag{7.62}$$

$$O(1,3)_-\downarrow = TSO(1,3)\uparrow\ . \tag{7.63}$$

$\diamondsuit$

Dimostrazione. Dato che i quattro insiemi sono disgiunti e la loro unione è $O(1,3)$ l'unica cosa che rimane da provare e che non è stata già provata sopra è che essi sono aperti e connessi. È sufficiente provare che $SO(1,3)\uparrow$ è aperto e connesso. Una volta provato ciò, essendo la moltiplicazione per T, P, TP un diffeomorfismo di $O(1,3)$ in $O(1,3)$, segue che anche $O(1,3)_-\uparrow$ $, O(1,3)_+\downarrow, O(1,3)_-\downarrow$ sono aperti e connessi.
$SO(1,3)\uparrow$ è aperto (nella topologia di $O(1,3)$) perché dato dall'intersezione di due insiemi aperti: rispettivamente la controimmagine dell'insieme $(0,+\infty)$ rispetto a $\det : O(1,3) \to \mathbb{R}$ e la controimmagine dello stesso insieme rispetto alla funzione che calcola ${\Lambda^0}_0$ per ogni $\Lambda \in O(1,3)$.
La connessione di $SO(1,3)\uparrow$ si prova come segue. Se $\Lambda \in SO(1,3)\uparrow$, per il teorema 7.3, $\Lambda = \Lambda_p\Omega$ dove Λ_p è pura. Si noti che $\Lambda_p^{-1}\Lambda \in SO(1,3)\uparrow$ per il punto (5) del teorema 7.3 ed essendo $SO(1,3)\uparrow$ un gruppo. Allora $\Omega = \Lambda_p^{-1}\Lambda \in SO(1,3)\uparrow$ e deve essere necessariamente della forma

Ω_R (7.11) con $R \in SO(3)$. Usando (7.12) ed il teorema 7.5 abbiamo infine che:

$$\Lambda = e^{\theta m \cdot \mathbf{S}} e^{\chi n \cdot \mathbf{K}}$$

per qualche $\theta, \chi \in \mathbb{R}$ e $n, m \in \mathbb{S}^2$. Possiamo costruire un cammino continuo

$$[0,2] \ni t \mapsto \gamma(t) \in SO(1,3)\!\uparrow$$

che connette I a Λ in $SO(1,3)\!\uparrow$:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= e^{t\theta m \cdot \mathbf{S}} \quad \text{se } t \in [0,1)\,, \\ \gamma(t) &:= e^{\theta m \cdot \mathbf{S}} e^{(t-1)\chi n \cdot \mathbf{K}} \quad \text{se } t \in [1,2]\,. \end{aligned}$$

Il fatto che per ogni $t \in [0,2]$ gli elementi del cammino siano in $SO(1,3)\!\uparrow$ è immediato. Scegliendo di seguito u e v in modo da esaurire tutti i casi possibili da verificare, si ha

$$\det e^{u\theta m \cdot \mathbf{S}} e^{v\chi n \cdot \mathbf{K}} = \det e^{u\theta m \cdot \mathbf{S}} \det e^{v\chi n \cdot \mathbf{K}} = e^{v\chi n \cdot tr\mathbf{K}} e^{u\theta m \cdot tr\mathbf{S}} = e^0 e^0 = 1\,,$$

dove $e^{u\theta m \cdot \mathbf{S}} = \Omega_R$ è dato da (7.11) per cui $e^{u\theta m \cdot \mathbf{S}} \in O(1,3)\!\uparrow$ e infine $e^{u\theta m \cdot tr\mathbf{S}}$ è una trasformazione pura per il teorema 7.5 per cui è un elemento di $O(1,3)\!\uparrow$ per il teorema 7.3 punto (5). Dunque $SO(1,3)\!\uparrow$ è connesso per archi e quindi connesso. $\Box$

Segue immediatamente un ovvio ma importante corollario.

Corollario. *$SO(1,3)\!\uparrow$ è un gruppo di Lie matriciale in quanto sottogruppo di Lie di $O(1,3)$, inoltre, se $so(1,3)\!\uparrow$ denota l'algebra di Lie di $SO(1,3)\!\uparrow$, $so(1,3)\!\uparrow = o(1,3)$.* $\diamondsuit$

Nota 7.3. È ovvio che da (7.61), (7.62) e (7.63) seguano teoremi di decomposizione e rappresentazione delle componenti connesse del gruppo di Lorentz diverse da quella che contiene l'identità gruppale.

Esercizi 7.1. .

1. Mostrare che il gruppo di Poincaré è un gruppo di Lie matriciale sottogruppo di $GL(5,\mathbb{R})$.
Suggerimento. Considerare la classe di matrici

$$\left[\begin{array}{c|c} \Lambda & C \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\,; \tag{7.64}$$

dove $C \in \mathbb{R}^4$ e $\Lambda \in O(1,3)$.

2. Mostrare che l'algebra di Lie del gruppo di Poincaré è la somma diretta $so(1,3) \oplus \mathbb{R}^4$ come spazio vettoriale, ma non lo e' come algebra di Lie (cioè il commutatore non soddisfa

$$[(A,t),(A',t')] = ([A,A'],0)\,,$$

dove $A, A' \in so(1,3)$ e $t \in \mathbb{R}^4$).

Capitolo 8

Le idee fisico-matematiche alla base della teoria Generale della Relatività.

In questo capitolo esamineremo in termini rigorosi le idee che stanno alla base della Relatività Generale. Nella prima sezione introdurremo le idee fisiche fondamentali e, nella seconda, gli strumenti matematici necessari a trascrivere nel linguaggio della geometria differenziale lorentziana tali idee fisiche. Nelle sezioni successive procederemo con la costruzione esaminandone le prime importanti conseguenze.

8.1 Fisica: il Principio di Equivalenza di Einstein.

La teoria della Relatività Generale fu formulata da Einstein dieci anni dopo la teoria della Relatività Speciale. La seconda ingloba la teoria del campo gravitazionale all'interno della geometria dello spaziotempo. L'idea centrale di Einstein per rappresentare la gravità in termini geometrici è basata sul cosiddetto **principio di equivalenza**. Il principio di equivalenza che formuleremo tra poco è basato sull'osservazione fondamentale, sottolineata da Einstein, che la *massa gravitazionale* e la *massa inerziale* coincidono. La prima è la costante M, caratteristica di un corpo, che compare nella formula della gravitazione universale di Newton:

$$\vec{F} = -G\frac{MM'}{||P-Q||^3}(P-Q)\,,$$

dove $\vec{F}$ è la forza gravitazionale che il corpo di massa M' in Q esercita sul corpo di massa M in P. La massa inerziale m è invece la costante, caratteristica di un corpo, che appare nel secondo principio della dinamica:

$$\vec{F}(t,P,\vec{v}) = m\vec{a}\,,$$

dove $\vec{a}$ è l'accelerazione del punto materiale P di massa inerziale m, valutata in un riferimento inerziale, e $\vec{F}$ è la forza totale agente sul punto materiale. Newton postulò che

$$M = m\,.$$

Questa coincidenza di valori è stata verificata sperimentalmente con incredibile precisione in diversi esperimenti con pendoli a torsione di Eötvos (con un errore di relativo di 10^{-9}) e da Dicke e collaboratori in tempi pi recenti (con un errore relativo di 10^{-12}). La coincidenza delle due nozioni di massa ha l'importante conseguenza stabilita dal cosiddetto *Principio di Equivalenza* di Einstein (in forma debole) che sancisce, in fisica classica, l'equivalenza tra locale i campi gravitazionali e le forze inerziali:

Principio di Equivalenza di Einstein. *È possibile annullare localmente l'effetto dinamico del campo gravitazionale tramite le forze inerziali in un riferimento in caduta libera nel campo gravitazionale. Viceversa è possibile creare gli effetti dinamici dovuti ad un campo gravitazionale lavorando in un riferimento accelerato rispetto ad un riferimento inerziale.*

Nota 8.1. "Localmente" significa sopra: *in regioni spaziali sufficientemente piccole e per intervalli di tempo sufficientemente brevi.*

Esemplifichiamo il significato fisico di tale principio. In fisica classica, consideriamo un campo gravitazionale $\vec{g} = \vec{g}(t, P)$ arbitrario valutato in coordinate di un riferimento inerziale $\mathscr{I}$. $\vec{g}(t, P)$ è quindi il vettore *accelerazione di gravità* nel punto P nello spazio di quiete del riferimento ed all'istante t. Consideriamo ora un nuovo riferimento, *non inerziale*, $\mathscr{I}'$ in caduta libera nel campo gravitazionale. Tale riferimento si costruisce prendendo una particella O che si muove nel riferimento $\mathscr{I}$ con accelerazione:

$$\vec{a}_O|_{\mathscr{I}}(t) = \vec{g}(t, O(t)) .$$

Dotiamo quindi il punto O di un sistema di assi cartesiani ortonormali centrati ad ogni istante in $O(t)$ e assumiamo che tali assi *non ruotino* rispetto agli assi di $\mathscr{I}$. In tal modo il riferimento $\mathscr{I}'$ solidale con O e con gli assi costruiti *non ruota* rispetto a $\mathscr{I}$.
Svolgiamo ora elementari esperimenti di dinamica nel riferimento $\mathscr{I}'$. Prendiamo un punto materiale P dotato di massa inerziale m e massa gravitazionale M e lanciamolo, partendo da O con una arbitraria velocità iniziale. Quale sarà il suo moto in $\mathscr{I}'$? Le equazioni del moto di P in $\mathscr{I}$ si scrivono:

$$m\vec{a}_P|_{\mathscr{I}} = M\vec{g}(t, P(t)) .$$

Ma, essendo il moto di $\mathscr{I}'$ rispetto a $\mathscr{I}$ puramente traslatorio, abbiamo anche che:

$$\vec{a}_P|_{\mathscr{I}}(t) = \vec{a}_P|_{\mathscr{I}'}(t) + \vec{a}_O|_{\mathscr{I}}(t)$$

Pertanto le equazioni del moto di P nel riferimento $\mathscr{I}'$ si possono scrivere

$$m\vec{a}_P|_{\mathscr{I}'}(t) = -m\vec{a}_O|_{\mathscr{I}}(t) + M\vec{g}(t, P(t)) ,$$

ovvero, tenendo conto di $\vec{a}_O|_{\mathscr{I}}(t) = \vec{g}(t, O(t))$,

$$m\vec{a}_P|_{\mathscr{I}'}(t) = -m\vec{g}(t, O(t)) + M\vec{g}(t, P(t)) .$$

Infine tenendo conto che $m = M$ si trova che, per ogni punto materiale di massa inerziale arbitraria m:
$$m\vec{a}_P|_{\mathscr{I}'}(t) = m\,(\vec{g}(t, P(t)) - \vec{g}(t, O(t)))\ .$$
Vediamo allora che tanto più il punto P si trova vicino all'origine O delle coordinate del riferimento $\mathscr{I}'$ – e questo succederà considerando tempi sufficientemente piccoli dato che il punto materiale P parte inizialmente da O – tanto più il suo moto assomiglierà al moto rettilineo uniforme, come se il punto non fosse sottoposto ad alcuna forza, alla forza gravitazionale in particolare.
Viceversa possiamo creare gli effetti di un campo gravitazionale lavorando in un riferimento non inerziale $\mathscr{I}'$ accelerato rispetto ad un riferimento inerziale $\mathscr{I}$. A titolo esemplificativo, supponiamo che $\mathscr{I}'$ sia determinato rispetto al riferimento inerziale $\mathscr{I}$ assegnando, come prima, il moto accelerato dell'origine degli assi di $\mathscr{I}'$, indicata con O e supposta avere accelerazione costante $\vec{a}_O|_{\mathscr{I}}$ rispetto a $\mathscr{I}$. Supporremo nuovamente che il moto di $\mathscr{I}'$ sia puramente traslatorio rispetto a $\mathscr{I}$. L'equazione della dinamica, per un punto materiale P di massa m non sottoposto a forze, sarà nel riferimento $\mathscr{I}$:
$$m\vec{a}_P|_{\mathscr{I}} = \vec{0}$$
e quindi, nel riferimento $\mathscr{I}'$:
$$m\vec{a}_P|_{\mathscr{I}'}(t) = -m\vec{a}_O|_{\mathscr{I}}\vec{g}\,.$$
In altre parole, nel riferimento $\mathscr{I}'$ vale, per ogni punto materiale di qualunque massa inerziale m e massa gravitazionale M:
$$m\vec{a}_P|_{\mathscr{I}'}(t) = M\vec{g} \tag{8.1}$$
dove il campo gravitazionale che appare in $\mathscr{I}$ è definito da $\vec{g} = -\vec{a}_O|_{\mathscr{I}}$. L'equazione (8.1), ancora una volta, ha senso perché $M = m$.

Nota 8.2. Questi risultati non sono affatto banali perché coinvolgono la natura del campo gravitazionale e la struttura generale della formulazione della dinamica in fisica classica. Considerando altri tipi di campi di forze in luogo del campo gravitazionale, non si ha lo stesso risultato, anche assumendo l'uguaglianza della massa inerziale e di quella gravitazionale.

Un secondo risultato conseguente dal fatto che la massa gravitazionale coincida con quella inerziale, è che il moto di un punto materiale in un assegnato campo gravitazionale *non* dipende dalla massa del corpo, ma solo dalla sua posizione e velocità iniziale.
Questi due fatti portarono Einstein, nel tentativo di dare una descrizione relativistica della gravità estendendo la teoria della relatività speciale, ad assumere i seguenti tre principi, che fondano la teoria della relatività generale.

RG1. *Lo spaziotempo, anche nella situazione che corrisponde classicamente alla presenza di gravitazione, è descritto da varietà differenziabile quadridimensionale M con metrica lorentziana* $\mathbf{g}$*, connessa e temporalmente orientata. Ulteriormente, generalizzando le analoghe identificazioni dalla Relatività Speciale, valgono le seguenti identificazioni tra enti fisici ed enti matematici.*

(a) La storia di un punto materiale è descritta nello spaziotempo da una curva differenziabile di tipo causale futuro orientata, cioé da una linea di universo nel senso della definizione 3.11.

(b) Nel caso di una linea di universo di tipo tempo, il tempo proprio (cioé il tempo misurato da un orologio ideale in quiete con un punto materiale) coincide con l'ascissa curvilinea della curva (definizione 4.1) divisa per c, definendo il vettore tangente quadrivelocità V che soddisfa $\mathbf{g}(V|V) = -c^2$.

(c) Lo spazio fisico di quiete con il punto materiale in un evento della sua storia è descritto, a livello infinitesimo, dal sottospazio dello spazio tangente a quell'evento normale al vettore tangente all curva dotato del prodotto scalare definito positivo indotto da $\mathbf{g}$.

Nota 8.3. La richiesta di connessione (necessaria per l'orientabilità temporale) è fisicamente ovvia: non ci sarebbe nessuna possibilità di comunicare tra regioni sconnesse.

RG2. *Il moto dei corpi puntiformi che classicamente erano visti come sottoposti al solo campo gravitazionale è descritto dalle geodetiche (di tipo causale futuro) nello spaziotempo rispetto alla connessione di Levi-Civita associata a* $\mathbf{g}$. *In questo senso, il contenuto fisico del campo gravitazionale classico è ora descritto da* proprietà *della metrica dello spaziotempo.*

L'ultimo dei tre principi, che enunciamo di seguito, cade spesso sotto il nome di *principio di equivalenza forte*. Tale principio è il più difficile da interpretare matematicamente, in particolare è difficile dare un significato preciso alle locuzioni *locale* e *localmente* nel contesto geometrico differenziale introdotto dai precedenti due principi. Per fare ciò abbiamo bisogno di nuovi strumenti e risultati matematici che introdurremo nella prossima sezione.

RG3. *Esistono sistemi di coordinate locali, associati a sistemi di riferimento di caduta libera, in cui i moti descritti da geodetiche temporali appaiono localmente come moti rettilinei uniformi. In tali sistemi di riferimento le leggi della fisica assumono la stessa forma che avevano nei sistemi di riferimento inerziali della teoria relativistica speciale.*

Nota 8.4. Deve essere chiaro che la prima parte di **RG3** è una riformulazione della prima affermazione del *principio di equivalenza*, quando si tiene conto di **RG2**.

8.2 Matematica: l'exponential map.

Introdurremo ora uno strumento matematico importante che ci permetterà di dare significato matematicamente rigoroso alla prima affermazione contenuta nel principio **RG3**. Questo strumento è un particolare sistema di coordinate nell'intorno di un fissato punto di una varietà (pseudo)riemanniana o più in generale di una varietà dotata di connessione affine. Attraverso tale sistema di coordinate si può identificare un intorno della varietà con lo spazio tangente alla varietà .

8.2.1 L'exponential map e le coordinate normali attorno ad un punto.

Consideriamo una varietà differenziabile M dotata di una connessione affine ∇. Assumeremo che entrambe siano C^∞ anche se C^2 è sufficiente per quanto segue. Se (U, ϕ) è una carta locale su M con coordinate $x^1, \ldots, x^n$, consideriamo le coordinate naturali locali su TM, $(x^1, \ldots, x^n, x'^1, \ldots, x'^n)$ indotte dalla carta (U, ϕ).
Ricordiamo che questo sistema di coordinate naturali indotto dalla carta locale (U, ϕ) su M con coordinate $x^1, \ldots, x^n$ è definito dal fatto che ogni vettore tangente in T_pM con $U \ni p$ e con coordinate $x^1_p, \ldots, x^n_p$, ha componenti:

$$x'^i_v \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \, .$$

L'elemento $(p, v) \in TM$ è dunque individuato dalla $2n$-pla $(x^1_p, \ldots, x^n_p, x'^1_v, \ldots, x'^n_v)$.
Il problema di Cauchy associato all'equazione delle geodetiche della connessione ∇, visto come un problema di Cauchy *del prim'ordine* in TM, si scrive esplicitamente nelle coordinate dette:

$$\begin{cases} \dfrac{dx'^i}{dt} = & -\Gamma(x^1(t), \ldots, x^n(t))^i_{jk} x'^j x'^k \, , \\ \dfrac{dx^i}{dt} = & x'^i(t) \, , \\ x^i(0) = x^i_p & x'^i(0) = x'^i_p \, , \end{cases} \qquad i = 1, \ldots n \, . \tag{8.2}$$

In particolare $(x^1_p, \ldots, x^n_p)$ sono le coordinate di $p \in U$, il punto di partenza dalla geodetica con vettore tangente iniziale $x'_p = x'^i_p \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Indichiamo con $\gamma = \gamma(p, v_p, t) \in U$, la proiezione in U dell'unica soluzione *massimale* di (8.2) dove $p \in U$, $v_p \in T_pM$ e t appartiene a qualche intervallo aperto $I \ni 0$ che dipende da p e v_p in generale. Nel seguito rappresenteremo (p, v_p) in termini delle corrispondenti coordinate $(x^1_p, \ldots, x^n_p, x'^1_{v_p}, \ldots, x'^n_{v_p}) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
Come ben noto, dalla teoria generale dei sistemi di equazioni differenziali, se uno considera soluzioni massimali e ne varia le condizioni iniziali $p \in U$, $v_p \in T_pM$, prendendo t nel risultante intervallo, il dominio globale $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ di $\gamma = \gamma(p, v_p, t)$, al variare di tutte le variabili (p, v_p, t) risulta essere un insieme *aperto* di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Di conseguenza, se fissiamo $r \in U$, ci sarà un insieme di forma $V_r \times B_\delta(0) \times (-\epsilon, \epsilon)$ – con $\epsilon > 0$, essendo $B_\delta(0)$ la palla aperta in $\mathbb{R}^n$ di raggio $\delta > 0$ centrata in 0 ed essendo $V_r \subset U$ un intorno aperto di r – tale che

$$V_r \times B_\delta(0) \times (-\epsilon, \epsilon) \ni (p, v_p, t) \mapsto \gamma(p, v_p, t)$$

è ben definita. Riduciamoci d'ora in poi a lavorare su questo insieme.
L'equazione (8.2) ed il teorema di unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali implicano subito che, per ogni $\lambda > 0$, se la geodetica $t \mapsto \gamma(p, v_p, t)$ è definita per $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, allora la geodetica $t \mapsto \gamma(p, \lambda v_p, t)$ è definita per $t \in (-\epsilon/\lambda, \epsilon/\lambda)$, e

$$\gamma(p, \lambda v_p, t) = \gamma(p, v_p, \lambda t) \, . \tag{8.3}$$

(Infatti il membro di destra, pensato come una funzione di $t \in (-\epsilon/\lambda, \epsilon/\lambda)$, soddisfa l'equazione delle geodetiche con vettore tangente iniziale in p dato da λv_p.) Quindi possiamo fissare $\lambda > 0$

piccolo a sufficienza al fine di ottenere $\epsilon' := \epsilon/\lambda > 1$. Concludiamo che, se $(p, u_p) \in V_r \times B_{\delta'}(0)$ con $\delta' = \lambda\delta$, allora la funzione:

$$V_r \times B_{\delta'}(0) \ni (p, u_p) \mapsto \gamma(p, u_p, t)$$

è ben definita per $t \in (-\epsilon', \epsilon') \supset (-1, 1)$. In definitiva, se $\delta > 0$ è sufficientemente piccolo, la funzione

$$V_r \times B_\delta(0) \ni (p, u_p) \mapsto \exp_p(u_p) := \gamma(p, u_p, 1) \tag{8.4}$$

è ben definita. Si osservi che teoremi noti riguardanti la dipendenza regolare delle soluzioni di equazioni differenziali dai dati iniziali implicano che $(p, u_p) \mapsto \exp_p(u_p)$ è una funzione C^∞. Per ogni $p \in V_r$, la palla $B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$ si identifica con un intorno aperto e *stellato* dell'origine[1] di T_pM. L'identificazione avviene tramite la funzione che associa al vettore colonna di $\mathbb{R}^n$ il corrispondente vettore di T_pM con le stesse componenti rispetto alla base $\{\partial/\partial x^i|_p\}_{i=1,\ldots,n}$.

Definizione 8.1. Sia M una varietà differenziabile C^∞ dotata di una connessione affine ∇ di classe C^∞.
(a) La funzione (8.4) definita in un insieme aperto $E \subset TM$, (sufficientemente piccolo e rappresentato, in coordinate locali naturali di TM, come prodotto $V_r \times B_{\delta'}(0)$) è detta **exponential map su** E.
(b) Se $p \in M$, la restrizione dell'exponential map a $\{p\} \times U_0$, dove U_0 è un opportune intorno aperto e stellato dell'origine 0 di T_pM, è detto **exponential map centrato in** p. $\diamondsuit$

Nota 8.5. L'equazione (8.3) con $t = 1$ si scrive

$$\gamma(p, \lambda v_p, 1) = \gamma(p, v_p, \lambda) \, ,$$

ossia:

$$\exp_p(\lambda v_p) = \gamma(p, v_p, \lambda) \, .$$

Questa identità dice che la funzione (ben definita perché l'intorno di definizione di $\exp_p$ è stellato)

$$[0, 1] \ni \lambda \mapsto \exp_p(\lambda v_p) \in M, \tag{8.5}$$

definisce l'unico segmento di geodetica che parte da p, con vettore tangente v_p e parametro affine $\lambda \in [0, 1]$.

Possiamo ora enunciare e provare il risultato fondamentale riguardante l'exponential map.

Teorema 8.1. *Sia M una varietà differenziabile C^∞ dotata di una connessione affine ∇ di classe C^∞. Si consideri l'exponential map centrato in un punto $p \in M$. Valgono i seguenti fatti.*

[1] Un intorno aperto e stellato dell'origine O di uno spazio vettoriale topologico V è un intorno aperto U di 0 tale che, se $v \in U$, allora il segmento che unisce 0 a v è anch'esso completamente contenuto in U.

(a) *In un intorno aperto e stellato U_0 dell'origine di T_pM, l'exponential map definisce un diffeomorfismo sull'insieme aperto $\exp_p(U_0)$. In tal modo i vettori in un intorno aperto dell'origine di T_pM vengono differenziabilmente e biunivocamente identificati con i punti in un intorno aperto di p.*
(b) *Se ∇ ha torsione nulla e $\{e_{pi}\}_{i=1,\ldots,n} \subset T_pM$ è una base, si consideri il sistema di coordinate locali su $\exp_p(U_0)$ che associa $q \in \exp_p(U_0)$ alle componenti di $\exp_p^{-1}(q)$ respetto alla base detta:*

$$q \mapsto \left(\langle \exp_p^{-1}(q), e_p^{*1}\rangle, \cdots, \langle \exp_p^{-1}(q), e_p^{*1}\rangle\right) \,.$$

In quel sistema di coordinate i coefficienti di connessione di ∇ si annullano in p.
(c) *Se ∇ è la connessione di Levi-Civita associata con una (pseudo)metrica* $\mathbf{g}$ *di classe C^∞ su M, e $\{e_{pi}\}_{i=1,\ldots,n} \subset T_pM$ è una base, in riferimento alle coordinate locali introdotte in (a), le componenti delle derivate della metrica rispetto alle coordinate si annullano in p.* $\diamondsuit$

Dimostrazione. Per dimostrare (a) è sufficiente fare vedere che $d\exp_p|_p$ è non singolare. Fissiamo un sistema di coordinate locali attorno a p con coordinate $x^1, \ldots, x^n$ and denotiamo con $(\exp_p(v))^i$ la componente i-esima della funzione di $\exp_p(v)$. Vale, *dove non usiamo la convenzione di somma sugli indici ripetuti*:

$$\frac{\partial}{\partial v^j}\bigg|_{v=0} \left(\exp\left(\sum_{i=1}^n v^i e_{pi}\right)\right)^k = \frac{\partial}{\partial v^j}\bigg|_{v=0} \left(\exp\left(v^j e_{pj}\right)\right)^k = \frac{\partial}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} \left(\exp\left(\lambda e_{pj}\right)\right)^k \,.$$

Usando l'osservazione 8.5 si ha infine:

$$\frac{\partial}{\partial v^j}\bigg|_{v=0} \left(\exp\left(\sum_{i=1}^n v^i e_{pi}\right)\right)^k = \frac{\partial}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0} \gamma^k(p, e_{pj}, \lambda) = e^k_{pj} \,,$$

dove e^k_{pj} è la k-esima componente di e_{pj} rispetto alla base $\{\partial/\partial x^i|_p\}_{i=1,\ldots,n}$. Le la matrice le cui colonne sono le componenti di questi vettori di $\mathbb{R}^n$ è non singolare dato che $\{e_{pj}\}_{j=1,\ldots,n}$ è una base. La dimostrazione di (a) è terminata.
In coordinate $y^1, \ldots, y^n$ definite su $\exp_p(U_0)$ e che associano $q \in \exp_p(U_0)$ con le componenti di $\exp_p^{-1}(q)$ rispetto alla base $\{e_{pi}\}_{i=1,\ldots,n}$, ogni geodetica che parte da p con vettore tangente iniziale $v_p = v^i e_{pi}$ ha equazione: $y^i(\lambda) = \lambda v^i$ come segue immediatamente dalla (8.5). Per le geodetiche uscenti da p e lavorando in tali coordinate vale allora che, per $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{d^2 y^i(\lambda)}{d\lambda^2} = 0 \,.$$

D'altra parte deve anche valere, per la definizione generale di geodetica:

$$\frac{d^2 y^i}{d\lambda^2} + \Gamma^i_{jk}(y^1(\lambda), \ldots, y^n(\lambda)) \frac{dy^j}{d\lambda}\frac{dy^k}{d\lambda} = 0 \,.$$

Di conseguenza, per ogni $\lambda \in [0, 1]$:

$$\Gamma^i_{jk}(y^1(\lambda), \ldots, y^n(\lambda)) \frac{dy^j}{d\lambda}\frac{dy^k}{d\lambda} = 0 \,.$$

In particolare, se $\lambda = 0$:

$$\Gamma^i_{jk}(p) v^j v^k = 0 \,, \quad \text{per ogni scelta dei } v^j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n. \tag{8.6}$$

Se la connessione ha torsione nulla, cioé $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, (8.6) implica, scegliendo $v^i = u^i + z^i$ per ogni $u^i, z^i \in \mathbb{R}$, che deve valere $\Gamma^i_{jk}(p) u^j z^k = 0$ per ogni $u^i, z^i \in \mathbb{R}$. Di conseguenza:

$$\Gamma^i_{jk}(p) = 0 \,.$$

La dimostrazione di (c) ora segue immediatamente tenendo conto del fatto che l'identità $\nabla \mathbf{g} = 0$, valida per la connessione di Levi-Civita, in coordinate ha la forma, se $\mathbf{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$:

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial y^j} = \Gamma^s_{jk} g_{si} + \Gamma^s_{ji} g_{ks} \,.$$

$\Box$

Definizione 8.2. Sia M una varietà differenziabile C^∞ dotata di una connessione affine ∇ di classe C^∞ e sia $p \in M$. Si consideri un intorno aperto stellato dell'origine 0 di T_pM su cui $\exp_p$ definisce un diffeomorfismo locale. Se $\{e_{pi}\}_{i=1,\ldots,n} \subset T_pM$ è una base, le coordinate locali definite su $\exp_p(U_0)$ che associano ogni $q \in \exp_p(U_0)$ alle componenti di $\exp_p^{-1}(q)$ sulla base detta:

$$q \mapsto \left(\langle \exp_p^{-1}(q), e_p^{*1}\rangle, \cdots, \langle \exp_p^{-1}(q), e_p^{*1}\rangle\right)$$

sono dette **coordinate normali (riemanniane)** centrate in p. $\diamondsuit$

8.2.2 Coordinate normali adattate ad una curva assegnata.

Passiamo a considerare un sistema di coordinate normali più complesso ed associato ad una assegnata curva differenziabile. Se M è la solita varietà differenziabile dotata di una metrica riemanniana o lorentziana $\mathbf{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, sia $\alpha : (a, b) \to M$ una curva differenziabile regolare, cioé con $\dot\alpha(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$. Nel caso lorentziano assumeremo ulteriormente che α sia di tipo tempo, cioé $g(\dot\alpha(t), \dot\alpha(t)) < 0$ per ogni valore del parametro $t \in (a, b)$.
Fissiamo $t_0 \in (a, b)$ e consideriamo una base del sottospazio $N_{\alpha(t_0)}\alpha$ di $T_{\alpha(t_0)}$ normale a $\dot\alpha(t_0)$, $\{e_{\alpha(t_0)i}\}_{i=2,\ldots,n}$. Quindi trasportiamo parallelamente tale base lungo α usando la procedura del trasporto parallelo. Dato che la procedura del trasporto parallelo conserva le relazioni metriche ed è biettiva, $\{e_{\alpha(t)i}\}_{i=2,\ldots,n}$ definisce ancora una base per il sottospazio $N_{\alpha(t)}\alpha$ di $T_{\alpha(t)}M$ normale a $\dot\alpha(t)$. Infine consideriamo la funzione:

$$\mathbb{R}^n \ni (t, v^2, \ldots, v^n) \mapsto \exp_{\alpha(t)}\left(\sum_{i=2}^n v^i e_{\alpha(t)i}\right) \tag{8.7}$$

Il significato geometrico della funzione definita in (8.7) dovrebbe essere chiaro: tale funzione associa $(t, v^2, \ldots, v^n)$ con il punto in M raggiunto dalla geodetica che parte da $\alpha(t)$ con vettore

tangente iniziale $\sum_{i=2}^{n} v^i e_{\alpha(t)i}$ normale ad α, quando il valore del parametro affine su di essa vale 1.
Discutiamo il dominio di definizione della funzione (8.7). Fissiamo coordinate locali $x^1, \ldots, x^n$ su un insieme aperto $U \ni \alpha(t_0)$. La funzione exp su TM è definita su un insieme aperto piccolo a sufficienza $E \subset TM$ tale che, nelle coordinate $x^1, \ldots, x^n, x'^1, \ldots, x'^n$, ha la forma $V \times B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, dove V corrisponde ad un intorno aperto di $\alpha(t_0)$ e $B_\delta(0)$ è una palla aperta di raggio $\delta > 0$ centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$. In queste coordinate (8.7) si esplicita come:

$$(t, v^2, \ldots, v^n) \mapsto \exp_{(x^1(t),\ldots,x^n(t))}\left(\sum_{k=1}^{n} x'^k(t, v^2, \ldots, v^n) \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{(x^1(t),\ldots,x^n(t))}\right), \tag{8.8}$$

dove α è parametrizzata come $x^k = x^k(t)$ e

$$x'^k(t, v^2, \ldots, v^n) := \sum_{i=2}^{n} v^i \left\langle e_{(x^1(t),\ldots,x^n(t))i}, dx^k|_{(x^1(t),\ldots,x^n(t))}\right\rangle .$$

Dato che tutte le funzioni coinvolte sono continue, si prova facilmente che il membro di destra in (8.8) è ben definito per $(t, v^2, \ldots, v^n) \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times D$, essendo $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ qualche palla aperta centrata nell'origine di $\mathbb{R}^{n-1}$.

Teorema 8.2. *Sia M una varietà differenziabile C^∞ dotata di una metrica C^∞ riemanniana o lorentziana $\mathbf{g} = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, e sia $\alpha : (a, b) \to M$ una curva differenziabile con $\dot\alpha(t) \neq 0$ per ogni $t \in (a, b)$, α è assunta essere di tipo tempo nel caso lorentziano. Si scelga $t_0 \in (a, b)$, e si consideri una base del sottospazio $N_{\alpha(t_0)}\alpha$ di $T_{\alpha(t_0)}M$ normale a $\dot\alpha(t_0)$, $\{e_{\alpha(t_0)i}\}_{i=2,\ldots,n}$ e si trasporti tale base lungo α in $\{e_{\alpha(t)i}\}_{i=2,\ldots,n}$ per ogni $t \in (a, b)$ usando la procedura del trasporto parallelo. Infine si consideri la funzione:*

$$(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times D \ni (t, v^2, \ldots, v^n) \mapsto \exp_{\alpha(t)}\left(\sum_{i=2}^{n} v^i e_{\alpha(t)i}\right) \tag{8.9}$$

per qualche $\epsilon > 0$ ed essendo $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ una palla aperta centrata nell'origine di $\mathbb{R}^{n-1}$. Valgono i seguenti fatti.
(a) *Restringendo se necessario l'insieme di definizione, la funzione (8.9) definisce un diffeomorfismo locale.*
(b) *Nella carta locale attorno ad α dotata di coordinate*

$$(y^1, y^2, \ldots, y^n) := (t, v^2, \ldots, v^n) ,$$

i coefficienti di connessione della connessione di Levi-Civita soddisfano, per $i = 1, \ldots, n$,

$$\Gamma^i_{jk}(\alpha(t)) = 0 , \quad \text{se } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ e } (j, k) \neq (1, 1). \tag{8.10}$$

(c) *Se α è una geodetica, nel sistema suddetto di coordinate locali attorno ad α, i coefficienti di connessione della connessione di Levi-Civita soddisfano:*

$$\Gamma^i_{jk}(\alpha(t)) = 0 , \quad \text{se } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \text{ e } i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{8.11}$$

Ulteriormente, nel sistema di coordinate detto, le derivate delle componenti della metrica si annullano lungo α per $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. $\diamondsuit$

Dimostrazione. Si considerino coordinate normali $x^1, \ldots, x^n$ centrate in $p = \alpha(t_0)$ ed associate alla base $\{\dot{\alpha}(t_0)\} \cup \{e_{\alpha(t_0)i}\}_{i=2,\ldots,n}$. In questo caso $\partial/\partial x^1|_p = \dot{\alpha}(t_0)$ e $\partial/\partial x^i|_p = e_{\alpha(t_0)i}$ per $i = 2, \ldots, n$.
La formula di derivazione delle funzioni composte produce immediatamente:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_{\alpha(t_0)} \left(\exp_{\alpha(t)}\left(\sum_{i=2}^n y^i e_{\alpha(t)i}\right)\right)^k = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0} \left(\exp_{\alpha(t)}(0)\right)^k + \sum_{i=2}^n y^i g^k(t, y^2, \ldots, y^n)\Bigg|_{(y^2,\ldots,y^n)=(0,\ldots,0)},$$

dove le funzioni g^k sono C^∞. Dato che $\exp_{\alpha(t)}(0) = \alpha(t)$, si conclude che:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_{\alpha(t_0)} \left(\exp_{\alpha(t)}\left(\sum_{i=2}^n y^i e_{\alpha(t)i}\right)\right)^k = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=t_0} \alpha^k(t) + 0 = \dot{\alpha}^k(t_0) = \left(\left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_{\alpha(t_0)}\right)^k = \delta^k_1 \,,$$

Per $j = 2, \ldots, n$, usando l'osservazione 8.5 si arriva a (dove non vale la somma sugli indici ripetuti):

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\alpha(t_0)} \left(\exp_{\alpha(t)}\left(\sum_{i=2}^n y^i e_{\alpha(t)i}\right)\right)^k = \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{(y^2,\ldots,y^n)=(0,\ldots,0)} \left(\exp_{\alpha(t_0)}\left(y^j e_{\alpha(t_0)j}\right)\right)^k = (e_{\alpha(t_0)j})^k = \delta^k_j .$$

Quindi, per $h, k = 1, \ldots, n$, si ha:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^h}\right|_{\alpha(t_0)} \left(\exp_{\alpha(t)}\left(\sum_{i=2}^n y^i e_{\alpha(t)i}\right)\right)^k = \delta^k_h \,,$$

e pertanto il rango della funzione (8.9) vale n in $\alpha(t_0)$ e quindi tale funzione definisce un diffeomorfismo locale attorno a p. Questo risultato conclude la prova di (a). La prova di (b) si ottiene procedendo come nella prova dell'analogo statement nel teorema 8.1, usando i fatti seguenti. (i) Le geodetiche che partono da $\alpha(t)$ con vettore tangente iniziale $\sum_{i=2}^n v^i \frac{\partial}{\partial y^i}|_{\alpha(t)}$ hanno equazione $y^1(\lambda) = t$ (costante!) e $y^j(\lambda) = \lambda v^j$ per $j = 2, \ldots, n$, questo comporta che $\Gamma^k_{ij}(\alpha(t)) = 0$ if $i, j = 2, \ldots, n$. (ii) I vettori $\partial/\partial y^j$ con $j = 2, \ldots, n$ soddisfano l'equazione del trasporto parallelo rispetto ad α, cioé rispetto a $\partial/\partial y^1$:

$$\frac{d}{dt}\delta^k_j + \delta^i_1 \Gamma^k_{ir}(\alpha(t))\delta^r_j = 0 \,,$$

questo fatto implica che $\Gamma^k_{1j}(\alpha(t)) = \Gamma^k_{j1}(\alpha(t)) = 0$ per $j = 2, \ldots, n$.
Per la dimostrazione di (c) notiamo che, se α è una geodetica, in coordinate $y^1, \ldots, y^n$, la curva $y^j(\lambda) = 0$ costantemente se $j = 2, \ldots, n$ e $y^1(\lambda) = \lambda$ è una geodetica perché coincide con α. Quindi con la stessa procedura usata precedentemente ne consegue che deve essere $\Gamma^k_{11}(\alpha(t)) = 0$.

□

Definizione 8.3. Sia M una varietà differenziabile C^∞ dotata di una metrica riemanniana o lorentziana $\mathbf{g}$ di classe C^∞. Si consideri una curva differenziabile non singolare $\alpha : (a,b) \to M$ che è ulteriormente assunta essere di tipo tempo se la metrica è lorentziana. Un sistema di coordinate definito in un intorno di un segmento di curva centrato in $t_0 \in (a,b)$:

$$\{\alpha(t) \mid t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)\} ,$$

come precisato in (b) di teorema 8.2 è detto *sistema di coordinate riemanniane* adattate a α. ♢

8.3 La versione geometrica di RG3 e nozione relativistica di gravità.

Procediamo ora con la trascrizione, in termini matematici, del principio **RG3**. Successivamente ci interrogheremo sul significato della nozione di gravità in relatività generale e vedremo che essa coincide con la curvatura dello spaziotempo.
Partiamo, in conformità con i principi **RG1** e **RG2**, con la seguente definizione di spaziotempo del tutto generale, che sarà l'ambiente nel quale sviluppare tutta la teoria della Relatività generale:

Definizione 8.4. Uno **spaziotempo della relatività generale**, o più brevemente uno **spaziotempo**, è una varietà differenziabile di dimensione 4 e classe C^∞ dotata di una metrica C^∞ lorentziana $\mathbf{g}$. Tale varietà è assunta essere connessa ed orientata temporalmente e non ammettere curve causali futuro orientate (definizione 3.11) che siano chiuse.
♢.

Commenti 8.1.
(1) La richiesta di non ammettere curve causali (futuro orientate) chiuse serve ad evitare problemi di carattere fisico, per esempio riguardanti l'esistenza delle soluzioni di equazioni differenziali iperboliche descriventi l'evoluzione di sistemi fisici, oltre ad evitare i paradossi causali della fantascienza. Nel caso dello spaziotempo di Minkowski, tali curve non possono esistere, ma possono esistere su varietà lorentziane connesse orientate temporalmente. Tale condizione viene spesso rafforzata richiedendo che non possano esistere curve causali futuro orientate che tornino arbitrariamente vicine a loro stesse. In termini matematici questa richiesta viene enunciata dalla cosiddetta **condizione di causalità forte** come segue: *per ogni intorno aperto U_p di ogni punto $p \in M$ esiste un secondo intorno aperto di p, $V_p \subset U_p$, tale che l'intersezione tra ogni curva causale ed orientata verso il futuro e V_p stesso è connessa.*
Se la condizione non fosse verificata ci sarebbe un intorno U_p di un punto p tale che per ogni intorno più piccolo V_p potremmo trovare sempre una curva causale che, *procedendo verso il futuro*, esce da V_p e alla fine ritorna nuovamente in V_p senza avere invertito la sua orientazione temporale. (Questo è possibile per intorni aperti V_p di p dalla forma particolare, per esempio di

clessidra, anche nello spaziotempo di Minkowski, tuttavia non è vero per *ogni* intorno aperto V_p di p contenuto in U_p in tale spaziotempo!)
(2) Si potrebbe assumere che lo spaziotempo sia, più semplicemente, temporalmente *orientabile* e non temporalmente *orientato.* In effetti, volendo essere rigorosi dal punto di vista fisico fondazionale, la scelta dell'orientazione temporale deve essere fissata dalle stesse leggi fisiche (la termodinamica), piuttosto che essere messa a mano.

8.3.1 L'interpretazione di RG3: sistemi di coordinate localmente inerziali.

In conformità con il principio **RG1** le storie dei punti materiali nello spaziotempo sono descritte da curve differenziabili di tipo causale, cioé da linee di universo nel senso della definizione 3.11. Se, in conformità con il principio **RG2** assumiamo in particolare che la descrizione relativistica del moto in caduta libera nel campo gravitazionale classico assegnato sia data dal moto geodetico nello spaziotempo M rispetto alla connessione di Levi-Civita della metrica $\mathbf{g}$, abbiamo come risultato che la linea di universo di un corpo classicamente sottoposto alla sola forza di gravità non dipende dalla massa, ma solo dall'evento da cui parte la geodetica e dalla quadrivelocità iniziale della geodetica. Questo è in perfetta armonia con il risultato classico che il moto di un punto materiale soggetto al solo campo gravitazionale non dipenda dalla massa del punto, ma solo dalla posizione ed dalla velocità iniziale del punto.
Consideriamo ora un corpo in caduta libera nel campo gravitazionale, ossia, nella visione einsteiniana, una geodetica causale diretta verso il futuro. Assumiamo più fortemente che la geodetica γ, parametrizzata nel tempo proprio τ, sia di tipo tempo futuro (è sufficiente assumere ciò in un evento, le proprietà del trasporto parallelo implicano che ciò sarà vero in tutti gli altri eventi raggiunti dalla geodetica). Parametrizziamo la geodetica con il tempo proprio τ che può essere definito esattamente come nella definizione 4.2 senza alcun problema. In virtù di **RG1**, nello spazio tangente a ciascun evento raggiunto dalla geodetica possiamo dare significato fisico agli oggetti matematici, mutuando tale significato da quello che si ha in relatività speciale. Lo spazio tangente $T_{\gamma(\tau)}M$ sarà decomposto in una somma diretta ortogonale:

$$L(\dot{\gamma}(\tau)) \oplus \Sigma_{\gamma(\tau)} \,,$$

dove $\Sigma_{\gamma(\tau)}$ ha la naturale interpretazione di spazio di quiete istantaneo con un osservatore la cui evoluzione temporale è descritta dalla geodetica e il cui asse temporale è indicato dal vettore quadrivelocità $V(\tau) := \dot{\gamma}(\tau)$. In tale spazio di quiete, per costruzione, la velocità della luce vale c in ogni direzione isotropicamente, dato che la struttura è la stessa che si ha in un riferimento inerziale nello spaziotempo di Minkowski. Possiamo ripristinare la definizione di velocità di una curva di universo γ' (generalmente diversa da γ), rispetto all'osservatore in quiete con γ, nell'evento $\gamma(\tau)$ in cui le due curve si intersecano. La definizione 4.3 può essere usata senza alcun problema e con le stesse proprietà già viste nello spazio di Minkowski. Si ha in particolare che le curve di tipo luce descrivono punti materiali in moto alla velocità della luce per ogni osservatore. In questo contesto possiamo introdurre la nozione di *sistema di coordinate localmente inerziale* attorno ad una geodetica di tipo tempo. Un sistema di coordinate localmente inerziale nell'intorno di un segmento di geodetica $\gamma(\tau)$ con $t \in (\tau_0 - \epsilon, \tau_0 + \epsilon)$ è un sistema di coordinate

riemanniane adattate a γ, $x^0 = c\tau, x^1, x^2, x^3$. Al solito x^0 indica la coordinata temporale e x^α indica la generica coordinata spaziale $\alpha = 1, 2, 3$. Questo sistema di coordinate è quello assunto esistere nel principio **RG3** come ora discuteremo.
Consideriamo una geodetica ρ di tipo tempo futuro corrispondente all'evoluzione spaziotemporale di un corpo puntiforme lanciato dall'osservatore descritto da γ e lasciato evolvere in caduta libera. Il lancio avviene nell'evento $\gamma(\tau_0)$. In coordinate riemanniane si ha che ρ è descritta da $x^i = x^i(\lambda)$, dove λ è un qualsiasi parametro affine, con $\rho(0) = \gamma(\tau_0)$ e pertanto $x^\alpha(0) = 0$ e $x^0(0) = c\tau_0$. Usando lo sviluppo di Taylor attorno a $\lambda = 0$ abbiamo, dove $O^i(\lambda) \to 0$ se $\lambda \to 0$:

$$x^i(\lambda) = x^i(0) + \lambda \left.\frac{dx^i}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} + \frac{\lambda^2}{2} \left.\frac{d^2x^i}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} + \lambda^2 O^i(\lambda)\,.$$

D'altra parte dovrà anche valere, dato che ρ è una geodetica:

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} = -\Gamma^i_{jk}(\rho(\lambda))\frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}\,.$$

Usando (c) del teorema 8.2 concludiamo che:

$$\left.\frac{d^2x^i}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0} = 0\,.$$

Pertanto:

$$x^i(\lambda) = x^i(0) + \lambda \left.\frac{dx^i}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} + \lambda^2 O^i(\lambda)\,. \tag{8.12}$$

Usando il fatto che ρ e γ sono entrambe di tipo tempo futuro si conclude subito che deve essere $dx^0/d\lambda|_0 > 0$. Questo significa che in un intorno di $\lambda = 0$, possiamo usare $x^0 = c\tau$ e quindi il tempo τ del sistema di coordinate localmente inerziali, per parametrizzare la curva ρ. Con questo parametro:

$$v_0^\alpha := c\frac{\left.\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}}{\left.\frac{dx^0}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}} = \left.\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}$$

è la velocità iniziale del punto materiale individuato da ρ nel sistema di coordinate localmente inerziali. La componente temporale di (8.12) fornisce allora:

$$c\tau(\lambda) - c\tau_0 = \lambda \left.\frac{dx^0}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} + \lambda^2 O^0(\lambda)$$

la quale, sostituita nelle componenti spaziali della (8.12) fornisce per $\alpha = 1, 2, 3$:

$$x^\alpha(\tau) = (\tau - \tau_0)v_0^\alpha + (\tau - \tau_0)^2 O'^\alpha((\tau - \tau_0))\,. \tag{8.13}$$

Quest'equazione dice, come richiesto dal principio **RG3** che il moto del punto è visto come un moto *rettilineo uniforme* a meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo, e non semplicemente superiore al prim'ordine, come accade per ogni moto approssimato con Taylor nell'intorno di ogni fissato istante! In altre parole non vi è accelerazione. In questo preciso senso, nei sistemi di coordinate localmente inerziali il moto dei corpi sottoposti al solo campo gravitazionale appare rettilineo uniforme.

8.3.2 Il principio di equivalenza in "forma forte" e l'equazione di conservazione del tensore energia impulso.

Per concludere commentiamo la seconda parte dell'enunciato **RG3**. Le leggi della fisica espresse in un evento di un riferimento inerziale in relatività speciale possono estendersi, al caso generale, ammettendo che in coordinate localmente inerziali abbiano la stessa forma che avevano in coordinate minkowskiane in relatività speciale. In questo schema rientrano anche le leggi esprimibili con equazioni differenziali del *primo'ordine*: in tal caso possono essere trascritte, in coordinate localmente inerziali, in modo identico a come apparivano in relatività speciale tenendo conto del fatto che i coefficienti di connessione si annullano in tali coordinate (esattamente su γ) come i coefficienti di connessione si annullavano in coordinate minkowskiane. Questo è il modo matematicamente preciso di intendere il principio di equivalenza forte. Seguendo questa idea possiamo affermare che sono dunque ancora valide nozioni come *massa* e *quadri impulso* per punti materiali e *tensore energia impulso* per sistemi estesi, anche in Relatività Generale e la formulazione della dinamica, entro certi limiti, avrà ancora validità . Inoltre, trattando la descrizione covariante delle equazioni di Maxwell e le relative approssimazioni per definire i raggi luminosi (equazione dell'iconale), si verifica che la storia delle particelle di luce (treni d'onda), anche in relatività generale devono essere descritte da curve di universo di tipo luce.
Una conseguenza importante di questa idea, che gioca un ruolo fondamentale nel determinare le equazioni di Einstein che collegano la materia alla geometria, è data dall'equazione (5.28):

$$\nabla_b T^{ab} = 0\,,$$

che esprime nello spaziotempo di Minkowski la conservazione del tensore energia impulso T^{ab} che esprime il contenuto energetico impulsivo della materia presente nello spaziotempo.
L'equazione (5.28) è del prim'ordine e pertanto ci si aspetta che sopravviva passando dalla relatività speciale alla relatività generale. È però importante osservare, che nel caso generale, tale equazione non corrisponde più alla legge di conservazione di alcuna quantità integrata su sottovarietà tridimensionali di tipo spazio. Questo perchè, volendo seguire la stessa procedura seguita nello spaziotempo di Minkowski, per ottenere una grandezza conservata nel senso della sezione 5.3.1, bisogna contrarre il tensore energia impulso con un campo vettoriale covariante ω *costante rispetto alla connessione di Levi-Civita*, come spiegato nella sezione 5.3.3. Non è per nulla ovvio che uno spaziotempo generico ammetta un campo covettoriale costante rispetto alla connessione di Levi-Civita.
Tuttavia la richiesta può essere indebolita. Se la metrica dello spaziotempo ammette un *campo vettoriale di Killing*, cioè un campo covettoriale K per il quale valgono le **equazioni di Killing**:

$$\nabla_a K_a + \nabla_b K_b = 0$$

e se il tensore energia impulso è simmetrico ($T^{ab} = T^{ba}$), allora il campo vettoriale:

$$X^b := K_a T^{ab}$$

soddisfa l'equazione, come si verifica immediatamente dalla (5.28) e dall'equazione di Killing tenendo conto della simmetria di T^{ab}:

$$\nabla_a X^a = 0 \,.$$

Tale identità implica immediatamente una legge di conservazione per la grandezza $\langle X, n\rangle$, come chiarito nella sezione 5.3.1 tenendo conto di (3) nella nota 5.3.
Non entriamo in ulteriori commenti tecnici, ma diciamo solo che l'equazione di Killing è equivalente alla richiesta che $\mathscr{L}_K \mathbf{g} = 0$, cioè la derivata di Lie della metrica si annulla quando è calcolata rispetto a K. Questo significa che la presenza di un campo di Killing corrisponde alla presenza di una *simmetria geometrica della metrica*: muovendosi lungo le linee integrali di K, le proprietà metriche dello spaziotempo rimangono invarianti. Nel caso in cui K sia di tipo tempo, ha ancora senso pensare la grandezza conservata associata a $X^b := K_a T^{ab}$ come a una forma di energia relativa alla direzione temporale individuata da K.

8.3.3 La deviazione geodetica e la gravità come curvatura dello spaziotempo.

La questione che ci poniamo ora è *cosa sia il corrispondente fisico-matematico del campo gravitazionale classico* nella nuova formulazione dello spaziotempo. La nozione classica basata sul concetto di forza non la possiamo più usare, perché le proprietà del corrispondente relativistico del campo gravitazionale classico sono descritte dalla metrica e non da una quadriforza. Inoltre il principio di equivalenza che afferma che si possa annullare localmente il campo gravitazionale, non permetterebbe comunque l'uso di una forza o quadriforza per descrivere l'azione gravitazionale, visto che una quadriforza non può essere annullata (essendo un tensore) con la scelta oculata di un sistema di coordinate: se è nulla in un sistema di coordinate è nulla in *ogni* sistema di coordinate. Dal punto di vista classico, eccettuata la situazione (fisicamente criticabile da diversi punti di vista) di un campo gravitazionale *statico uniforme ed infinitamente esteso nello spazio e nel tempo*, in presenza di campo gravitazionale si manifesta accelerazione *relativa* tra qualche coppia di particelle lanciate nel campo con velocità iniziale arbitraria. Adotteremo questa evidenza sperimentale come *definizione* di presenza di gravità . Per enunciare la definizione abbiamo bisogno di qualche concetto matematico preliminare.

Definizione 8.5. In uno spaziotempo $(M, \mathbf{g})$, una **famiglia a due parametri di geodetiche temporali** è una classe di geodetiche di tipo tempo futuro $\gamma(t, s)$, dove $t \in (a, b)$ è un parametro affine che corre su ogni geodetica $t \mapsto \gamma(t, s)$. $s \in (c, d)$ è un parametro che etichetta le singole geodetiche, e la funzione $(t, s) \mapsto \gamma(t, s)$ è C^∞ e definisce una sottovarietà Γ embedded di dimensione 2 su cui (t, s) siano coordinate ammissibili $\diamondsuit$

In base alla definizione data , nell'inintorno di ogni punto $p \in \Gamma$, possiamo completare le coordinate t e s con rimanenti $n - 2$ coordinate ($n := dim M$), in modo da avere un sistema di coordinate in M nell'intorno di p. Se, in riferimento a tale sistema di coordinate locali su M, definiamo $T := \partial/\partial t$ e $S := \partial/\partial s$, vale

$$[T, S] = 0 \,, \tag{8.14}$$

dato che T ed S sono i campi tangenti ad un sistema di coordinate. Questa identità , dato che la connessione di Levi-Civita ∇ ha torsione nulla [2], può anche essere riscritta come:

$$T^k \nabla_k S^h - S^k \nabla_k T^h = 0 \,. \tag{8.15}$$

Se s è fissato, il campo $S|_{\gamma(t,s)}$ rappresenta lo spostamento infinitesimo verso una geodetica vicina a $t \mapsto \gamma(t,s)$. Per tale motivo S è detto campo di deviazione geodetica. La velocità di **deviazione geodetica** rispetto ad una geodetica $\gamma(\cdot, s)$ ed al parametro affine t su di essa, è dunque espressa da $v(t,s) := (\nabla_T S)(t,s)$ e l'**accelerazione della deviazione geodetica** è espressa da $a(t,s) := (\nabla_T \nabla_T S)(t,s)$. Diamo allora la seguente definizione.

Definizione 8.6. In un insieme aperto $\Omega \subset M$ con $(M, \mathbf{g})$ spaziotempo, si dice che **è presente gravità** quando per qualche famiglia famiglia a due parametri di geodetiche temporali a valori in Ω, l'accelerazione della deviazione geodetica è non nulla in qualche evento su qualche geodetica della famiglia. $\diamondsuit$

Ricordiamo che su ogni varietà C^∞ (pseudo)riemanniana M la cui metrica C^∞ è indicata con $\mathbf{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ con connessione di Levi-Civita ∇, si definisce un campo tensoriale detto **tensore di curvatura di Riemann** [2], definito punto per punto come l'unico tensore $R(p) \in T_pM^* \otimes T_pM^* \otimes T_pM^* \otimes T_pM$ tale che

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) T^k|_p = R_{ijr}{}^k(p) T^r(p) \,, \tag{8.16}$$

per ogni campo tensoriale controvariante T (di classe C^∞).
Il fatto che $R_{ijr}{}^k(p)$ definiscano un tensore segue dal fatto che, come si prova per computo diretto, l'applicazione

$$U \otimes V \otimes T \mapsto U^i V^j (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) T^k|_p$$

dipende solo dal valore assunto da T, U, V in p ed è lineare, e tenendo infine conto che le trasformazioni lineari che associano tensori a tensori sono a loro volta rappresentabili tramite tensori.
Il fatto che il campo tensoriale $p \mapsto R(p)$ sia C^∞ risulta immediatamente dal fatto che in coordinate il calcolo diretto mostra che:

$$R_{ijr}{}^k = \frac{\partial \Gamma^k_{ir}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^k_{jr}}{\partial x^i} - \sum_l (\Gamma^l_{ir} \Gamma^k_{lj} - \Gamma^l_{jr} \Gamma^k_{li}) \,, \tag{8.17}$$

che è una funzione C^∞ delle coordinate.
Ricordiamo che il **tensore di curvatura di Ricci**, *Ric*, che gioca un ruolo importante nelle equazioni di Einstein è dato dalla contrazione:

$$Ric_{ik} = R_{ijk}{}^j \,.$$

Ricordiamo infine che una varietà (pseudo)riemanniana si dice *localmente piatta* [2] se ogni suo punto è contenuto in una carta locale nella quale la metrica à componenti costanti (in forma diagonale canonica). È chiaro per costruzione che, se M è localmente piatta, allora $R(p) = 0$ in ogni punto della varietà , dato che in tal caso, nell'intorno di ogni $p \in M$ esiste un sistema di coordinate in cui la metrica assume valore costante e per cui i coefficienti di connessione sono tutti nulli. In tale sistema di coordinate R si deve annullare in virtù della (8.17). Essendo R un tensore, si annullarà allora in *ogni* sistema di coordinate. In realtà , usando il teorema di Frobenius, si riesce a provare una proposizione più forte [2]:

Proposizione 8.1. *Sia $(M, \mathbf{g})$ una varietà (pseudo)riemanniana (di classe C^∞ con metrica $\mathbf{g}$ di classe C^∞). $(M, \mathbf{g})$ è localmente piatta se, e solo se, il tensore di Riemann associato alla connessione di Levi-Civita si annulla in ogni suo punto.*

Mostriamo ora come l'accelerazione della deviazione geodetica sia connessa al tensore di curvatura di Riemann.

Teorema 8.3. *In uno spaziotempo $(M, \mathbf{g})$, si consideri una famiglia a due parametri di geodetiche temporali $\gamma(t, s)$, dove $t \in (a, b)$ e $s \in (c, d)$ e siano $T := \partial/\partial t$ e $S := \partial/\partial s$ (vedi il commento sotto la definizione 8.5). Vale allora la* **formula della deviazione geodetica***:*

$$(\nabla_T \nabla_T S)^k = -R_{ijl}{}^k S^j T^i T^l \,. \tag{8.18}$$

$\diamondsuit$

Si osservi che, valutando tale espressione esattamente su Γ, il secondo membro di (8.18) non dipende da come abbiamo scelto le coordinate attorno alla sottovarietà Γ per definire i campi vettoriali S e T in un intorno di essa, per calcolare il primo membro di (8.18) (vedi il commento sotto la definizione 8.5).

Dimostrazione. Usando (8.15) si trova subito:

$$T^i \nabla_i (T^j \nabla_j S^k) = T^i \nabla_i \left(S^j \nabla_j T^k \right) \,,$$

quindi

$$T^i \nabla_i (T^j \nabla_j S^k) = \left(T^i \nabla_i S^j \right) \nabla_j T^k + S^j T^i \nabla_i \nabla_j T^k \,.$$

Usando nell'ultimo memebro la (8.17), si ha:

$$T^i \nabla_i (T^j \nabla_j S^k) = \left(T^i \nabla_i S^j \right) \nabla_j T^k + S^j T^i \nabla_j \nabla_i T^k - R_{ijl}{}^k S^j T^i T^l \,.$$

Usando ancora (8.15) nel primo addendo a secondo memebro troviamo:

$$T^i \nabla_i (T^j \nabla_j S^k) = \left(S^i \nabla_i T^j \right) \nabla_j T^k + S^j T^i \nabla_j \nabla_i T^k - R_{ijl}{}^k S^j T^i T^l \,.$$

Scambiando i nomi degli indici i e j nel primo addendo a secondo membro si ottiene infine:

$$T^i \nabla_i (T^j \nabla_j S^k) = \left(S^j \nabla_j T^i \right) \nabla_i T^k + S^j T^i \nabla_j \nabla_i T^k - R_{ijl}{}^k S^j T^i T^l \,.$$

Possiamo riscrivere tutto come:

$$T^i\nabla_i(T^j\nabla_j S^k) = S^j\nabla_j\left(T^i\nabla_i T^k\right) - R_{ijl}{}^k S^j T^i T^l\ .$$

Ricordando il significato di T, valendo $T^i\nabla_i T^k = 0$ a causa dell'equazione della geodetica di cui T è il vettore tangente, otteniamo la (8.18). $\Box$

In base alla definizione 8.6 possiamo concludere che in una regione Ω di spaziotempo non è presente gravità quando il tensore di curvatura di Riemann si annulla in tale regione. In realtà , sfruttando le proprietà di simmetria degli indici del tensore di Riemann, si può provare che vale anche il viceversa [2]: se in un insieme aperto Ω di spaziotempo non è presente gravità allora il tensore di Riemann è nullo in tale regione. *Concludiamo che l'assenza di gravità è equivalente alla locale piattezza dello spaziotempo.*

Nota 8.6.
(1) *Nel senso chiarito sopra, l'equivalente della gravità nella relatività generale è la curvatura (intesa come tensore di curvatura di Riemann) dello spaziotempo.* Equivalentemente, *l'assenza di gravità è equivalente alla locale piattezza dello spaziotempo.*
(2) I successivi sviluppi della relatività generale mostrano che la curvatura, nel senso più debole dato dal tensore di curvatura di Ricci[2], è legata alle masse presenti nello spaziotempo attraverso le celebri equazioni di Einstein, come vedremo più avanti.

Una conseguenza immediata del nuovo punto di vista è che, in presenza di curvatura (cioè di gravità in termini fisici), in generale non esistono più i riferimenti inerziali estesi della relatività speciale. In situazioni di curvatura debole ci dobbiamo aspettare (e questo si ottiene davvero sviluppando la matematica della relatività) che in regioni relativamente estese lontane dalle masse, esistano sistemi di coordinate tali che, con buona approssimazione, abbiano proprietà vicine a quelle dei sistemi di riferimento minkowskiani.
Questo risultato ha una conseguenza molto profonda dal punto di vista epistemologico, che cambia radicalmente uno dei pilastri su cui si basava la fisica classica. Dal punto di vista classico i riferimenti inerziali erano assegnati a priori e non erano conseguenza di alcun principio più profondo se non di quello che ne sanciva semplicemente l'esistenza. Ora l'esistenza o meno dei sistemi di riferimento inerziali dipende dalla curvatura dello spaziotempo che è legata, tramite le equazioni di Einstein, al contenuto energetico-impulsivo dello spaziotempo rappresentato dal tensore energia impulso della materia presente in esso.

[2]Il fatto che le equazioni di Einstein leghino le sorgenti di gravità al tensore di Ricci e non a quello di Riemann è dovuto, dal punto di vista fisico, al fatto che la gravità si propaga fuori dalle sorgenti, per cui ci può essere curvatura (tensore di Riemann) anche fuori dalle sorgenti.

8.4 Le equazioni del campo gravitazionale di Einstein.

In questa sezione arriveremo a scrivere le equazioni del campo gravitazionale di Einstein, cioè le equazioni che legano il tensore energia impulso della materia alla metrica. Per prima cosa mostriamo come, sotto ragionevoli ipotesi, le equazioni di Newton del moto di un punto materiale in un campo gravitazionale classico si ottengano come equazione della geodetica, in conformità con l'assunto **RG3**.

8.4.1 Il limite classico dell'equazione della geodetica.

Assumiamo vera l'idea di Einstein che la gravità sia in qualche modo legata alla metrica dello spaziotempo, in modo tale che lo spaziotempo localmente piatto (localmente di Minkowski) descriva la fisica dello spaziotempo in assenza di gravità. Dobbiamo allora aspettarci che, se la varietà non è piatta (eventualmente anche a causa della scelta "sbagliata" delle coordinate), le geodetiche soddisfino un'equazione vicina a quella che descrive il moto dei corpi in caduta libera in presenza di un potenziale gravitazionale φ della meccanica newtoniana:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^\alpha}|_{x(t)} \quad \alpha = 1,2,3\,.$$

Ciò deve accadere in qualche "limite classico" assumendo che la metrica si discosti poco dalla metrica di Minkowski, ma assumendo anche che le velocità in gioco siano piccole rispetto alla velocità della luce, perché questa è la situazione nella quale, dal punto di vista sperimentale, sappiamo che la fisica di Newton funziona benissimo.
Vogliamo verificare se questa idea è sensata e trovare, nell'approssimazione fatta, il corrispondente geometrico, del potenziale newtoniano φ.
Consideriamo uno spaziotempo della relatività generale ed assumiamo che esista un sistema di coordinate $x^0 = ct, x^2, x^2, x^3$, nella regione di spaziotempo considerata Ω, in cui le proprietà metriche e le proprietà cinematiche dei sistemi fisici presenti in Ω abbiano un comportamento *semiclassico / relativistico speciale*. Più precisamente faremo le seguenti assunzioni.

(a) La coordinata $x^0 = ct$ deve essere di *tipo tempo*, in altre parole $g_{00} = \mathbf{g}(\partial_{x^0}, \partial_{x^0}) < 0$. Anche il covettore dx^0 sarà assunto essere ovunque di tipo tempo (questo non è implicato dalla precedente richiesta), in modo tale che le sottovarietà a x^0 costante, su cui sono definite le coordinate x^1, x^2, x^3, sono sottovarietà di *tipo spazio*.

(b) La "velocità" in gioco, del sistema fisico considerato, pensata come il vettore colonna di derivate $\frac{dx^\alpha}{d\tau}$, $\alpha = 1,2,3$, deve essere piccola rispetto al valore c della velocità della luce. (τ indica qui il tempo proprio).

(c) Le componenti della metrica saranno assunte essere molto vicine alle componenti della metrica di Minkowski η: $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$ con $|h_{ij}| \ll 1$, ed anche le variazioni temporali della metrica saranno assunte essere trascurabili rispetto a quelle spaziali (metrica quasi stazionaria): $\left|\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^0}\right| \ll \left|\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^\alpha}\right|$, con $\alpha = 1,2,3$.

Consideriamo allora, nelle nostre coordinate che soddisfano (a), l'equazione della geodetica per un punto materiale che soddisfa (b) quando la metrica, in coordinate, soddisfa (c). Assumendo che la geodetica sia parametrizzata con il tempo proprio, la richiesta sulla quadrivelocità

$$-c^2 = \mathbf{g}(\dot{\gamma}|\dot{\gamma}) \,,$$

si scrive esplicitamente:

$$-1 = -(1+h_{00})\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}\right)^2 + \frac{2}{c}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{dt}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{1}{c^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} h_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} \,.$$

In base alle assunzioni in (b) e in (c), possiamo trascurare quasi tutto ottenendo:

$$-1 = -\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \,.$$

Per cui, nel seguito, identificheremo t ed il tempo proprio τ. In particolare trascureremo le derivate seconde $\frac{d^2t}{d\tau^2}$ ovunque. L'equazione della geodetica:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2}g^{ir}\left(\partial_{x^k}g_{rj} + \partial_{x^j}g_{kr} - \partial_{x^r}g_{jk}\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} \,,$$

tenendo conto della decomposizione $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$, dove i coefficienti η_{ij} sono costanti, si possono equivalentemente scrivere:

$$g_{ri}\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2}\left(\partial_{x^k}h_{rj} + \partial_{x^j}h_{kr} - \partial_{x^r}h_{jk}\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}$$

scegliendo $r = \alpha = 1,2,3$ diventa:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \sum_{\beta=1}^{3} h_{\alpha\beta}\frac{d^2x^\beta}{dt^2} = -\frac{1}{2}\left(\partial_{x^k}h_{\alpha j} + \partial_{x^j}h_{k\alpha} - \partial_{x^\alpha}h_{jk}\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} \,.$$

Nel primo membro, assumendo le $\frac{d^2x^\beta}{dt^2}$ tutte dello stesso ordine, possiamo trascurare il secondo addendo rispetto al primo dato che $|h_{ij}| \ll 1$ per ipotesi, ottenendo:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{2}\left(\partial_{x^k}h_{\alpha j} + \partial_{x^j}h_{k\alpha} - \partial_{x^\alpha}h_{jk}\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} \,.$$

e quindi

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\left(\partial_{x^0}h_{\alpha 0} + \partial_{x^0}h_{0\alpha} - \partial_{x^\alpha}h_{00}\right) - \frac{c}{2}\sum_{\beta=1}^{3}\left(\partial_{x^\beta}h_{\alpha 0} + \partial_{x^0}h_{\beta\alpha} - \partial_{x^\alpha}h_{0\beta}\right)\frac{dx^\beta}{dt}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^{3}\left(\partial_{x^\beta}h_{\alpha\gamma}+\partial_{x^\gamma}h_{\beta\alpha}-\partial_{x^\alpha}h_{\gamma\beta}\right)\frac{dx^\gamma}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}\,.$$

Nel secondo membro, le ultime due somme possono essere trascurate rispetto al primo addendo a secondo membro, a causa del fattore c^2 e del fatto che $|\frac{dx^\alpha}{dt}| \ll c$. Nell'espressione che rimane, possiamo trascurare $\partial_{x^0}h_{\alpha 0}+\partial_{x^0}h_{0\alpha}$ rispetto a $\partial_{x^\alpha}h_{00}$ per l'ipotesi, che abbiamo fatto, di metrica quasi stazionaria. Giungiamo alla formula finale:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}=\frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}\quad \alpha=1,2,3\,. \tag{8.19}$$

che può anche essere scritta, dato che $g_{ij}=\eta_{ij}+h_{ij}$ in (8.21) e i coefficienti η_{ij} sono costanti nelle coordinate considerate:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2}=\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\quad \alpha=1,2,3\,. \tag{8.20}$$

Queste sono le equazioni di Newton per un corpo nel campo gravitazionale con potenziale

$$\varphi=-\frac{c^2}{2}g_{00}\quad \text{oppure equivalentemente}\quad \varphi=-\frac{c^2}{2}h_{00}\,. \tag{8.21}$$

La differenza nelle due scelte non ha rilevanza in fisica classica, in cui il potenziale gravitazionale è definito a meno di una costante additiva. Tale costante si può convenzionalmente fissare richiedendo che all'infinito il potenziale φ si annulli. Se è vero che lontano dalle masse la metrica tende a diventare quella di Minkowski, tale convenzione corrisponde ad identificare φ con $-\frac{c^2}{2}h_{00}$.

8.4.2 Le equazioni di Einstein del campo gravitazionale.

Giungiamo al problema più interessante, cioè di scrivere le equazioni relativistiche che corrispondono, nella fisica di Newton alle *equazioni di Poisson*:

$$\Delta\varphi=-4\pi k\mu \tag{8.22}$$

che dicono come il potenziale gravitazionale è "generato" dalla materia, classicamente individuata dalla densità di massa μ. Sopra k è la costante gravitazionale che appare nella formula di Newton di gravitazione universale.
Le equazioni relativistiche che corrispondono (8.22) dovranno collegare la materia alla geometria dello spaziotempo.
Si può vedere con esempi concreti che, in situazioni semiclassiche (in cui, in particolare le velocità delle parti dei sistemi fisici sono piccole rispetto alla velocità della luce), la componente T^{00} del tensore energia impulso, che di fatto coincide con la densità di energia, domina su tutte le altre componenti. Quindi il contenuto energetico-impulsivo è dominato dalla parte energetica, che può pensarsi come uno scalare se le velocità in gioco tra i riferimenti sono piccole rispetto a c. L'idea di Einstein fu quella che, in regimi *ultrarelativistici*, il tensore energia impulso dovesse prendere il posto di μ nelle equazioni corrispondenti alla (8.22) e che la nuova equazione

connettesse la geometria al tensore energia impulso T_{ij} descrivente, localmente, la materia. Dato che T_{ij} è un tensore, nel caso più elementare possibile, l'equazione cercata dovrà avere una forma del tipo:

$$H_{ij} = T_{ij} \,, \tag{8.23}$$

dove a primo membro appare un tensore costruito con la sola geometria dello spaziotempo cioè, in coordinate, con le componenti della metrica e le loro derivate. Dato che in (8.22) il campo φ appare derivato al secondo ordine, l'idea di Einstein, tenendo conto di (8.20), fu che H dovesse essere scritto con *al più le derivate seconde della metrica* g_{ij} in ogni sistema di coordinate.
Un punto cruciale è che, come osservato nella sezione 8.3.2, il tensore energia impulso deve soddisfare le equazioni di conservazione:

$$\nabla_j T^{ij} = 0 \,,$$

e questa richiesta implica un fortissimo vincolo sul primo membro di (8.23). L'idea di Einstein fu che l'equazione di conservazione appena scritta doveva vedersi come una *conseguenza* della (8.23). Questo significa che H^{ij} deve essere un tensore, costruito in componenti con al più le derivate seconde delle componenti del tensore metrico e che soddisfi, per costruzione, l'equazione:

$$\nabla_j H^{ij} = 0 \,. \tag{8.24}$$

Si può dimostrare che, a meno della scelta di due costanti, esiste un solo tensore che soddisfa tutti i vincoli detti, ed ha la forma:

$$H_{ij} = \alpha \left(Ric_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} S + \Lambda g_{ij} \right) \,. \tag{8.25}$$

dove α e Λ sono costanti da determinare. α può essere fissata imponendo che le equazioni (8.23) si riducano a (8.22), nel limite di campi deboli, cioè $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$ con $|h_{ij}| \ll 1$, ammettendo che φ, a meno di costanti additive, corrisponda a $-\frac{c}{2} h_{00}$ come in (8.20), ed assumendo che il termine $T^{00} = c^2 \mu$ prevalga sulle altre componenti del tensore energia impulso. Si trova in tal modo che:

$$\alpha = \frac{c^4}{8\pi k} \,.$$

Le **equazioni di Einstein** risultano dunque essere:

$$Ric_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} S + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ab} \,. \tag{8.26}$$

La costante Λ è detta **costante cosmologica** e il suo valore non è ancora noto, malgrado sia connesso con recentissime osservazioni sperimentali.

8.5 Nozione generale di sistema di riferimento.

In questa sezione ci occuperemo della nozione generale di sistema di riferimento in relatività generale, tenendo conto che non possiamo più basarci sulla struttura di spazio affine dello spaziotempo, come accadeva nel caso dello spaziotempo di Minkowski. La discussione porterà a rivedere la procedura di sincronizzazione einsteiniana che abbiamo discusso costruendo la relatività speciale nella sezione 1.2.

8.5.1 Sistemi di riferimento in Relatività generale.

Come già discusso nel caso delle geodetiche di tipo tempo, possiamo mutuare dalla Relatività Speciale alcune nozioni metriche locali nel caso di una generica linea di universo di tipo tempo. Data una linea di universo $\gamma = \gamma(t)$ di tipo tempo, la **quadrivelocità** della linea di universo nell'evento $\gamma(t)$ è , come nel caso della relatività speciale, il vettore tangente alla curva $V_{\rho(t)}$ normalizzato con la richiesta $\mathbf{g}(V_{\rho(t)}|V_{\rho(t)}) = -c^2$. Si osservi che il parametro t è del tutto generico ed, in generale, *non* ha le dimensioni di un tempo. Viceversa, il parametro τ della linea di universo associato alla scelta $V = \partial/\partial\tau$ del vettore tangente, è , in base al postulato **RG1** il **tempo proprio** della linea di universo, cioé il tempo misurato da un orologio ideale in quiete con il punto materiale la cui storia è descritta da γ. Lo spazio tangente $T_{\gamma(t)}M$ sarà decomposto in una somma diretta *ortogonale* rispetto alla metrica $\mathbf{g}$:

$$L(\dot\gamma(t)) \oplus \Sigma_{\gamma(t)} \,, \tag{8.27}$$

dove $\Sigma_{\gamma(t)}$ ha la naturale interpretazione di spazio di quiete *infinitesimo* istantaneo in $\gamma(t)$ con il punto materiale la cui storia è descritta da γ. La metrica indotta su $\dot\gamma(t)$, che si riduce al numero $\mathbf{g}(\dot\gamma(t)|\dot\gamma(t))$, individua l'unità di misura del tempo proprio, la metrica spaziale indotta su $\Sigma_{\gamma(t)}$ descrive gli strumenti fisici per misurare le distanze e gli angoli attorno a $\gamma(t)$. Questa nozione di spazio di quiete infinitesimo è compatibile con la procedura di sincronizzazione di Einstein che abbiamo usato in Relatività Speciale, dato che la struttura geometrica e l'interpretazione fisica è esattamente la stessa che si ha nello spaziotempo di Minkowski. (In ogni caso il fatto che la velocità della luce risulti essere pari a c isotropicamente segue subito da quanto diremo nell'osservazione (2) sotto, eseguendo esplicitamente il calcolo e tenendo conto del fatto che le particelle di luce evolvono lungo curve di tipo nullo).
Vogliamo ora cercare di estendere queste nozioni locali (a rigore infinitesime) cercando di definire una nozione di *sistema di riferimento esteso* in Relatività Generale, tenendo però conto che non abbiamo più a nostra disposizione alcuna struttura affine come accadeva invece in $\mathbb{M}^4$.
In linea di principio l'idea più generale di sistema di riferimento in uno spaziotempo $(M, \mathbf{g})$, che comunque non adotteremo completamente nel seguito, può essere data tramite l'assegnazione di una classe C di curve differenziabili γ_p di tipo tempo dirette verso il futuro, individuata da un'applicazione $A \ni (t,p) \mapsto \gamma_p(t) \in M$, dove A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, tali che tali curve:

(a) riempiano tutto lo spaziotempo (cioè $A \ni (t,p) \mapsto \gamma_p(t) \in M$ è suriettiva) e

(b) non si autointersechino e neppure si intersechino a due a due (cioè $\gamma_p(t) = \gamma_q(s)$ implica $p = q$ e $t = s$).
Una terza condizione sarà data tra poco, prima di avere discusso brevemente i punti (a) e (b). Ogni evento p dello spaziotempo sarà intercettato esattamente da una di queste curve γ_p e da un unico valore del parametro t_p lungo tale curva. La particolare curva γ_p che intercetta p sarà la *posizione spaziale* di p nel riferimento C, mentre il valore t_p individuerà la *posizione temporale* di p nel riferimento C. Si osservi che il parametro t non coincide con il tempo proprio τ della linea di universo considerata se il vettore tangente non è unitario (assumendo $c = 1$).
Dato che i sistemi di coordinate sullo spaziotempo devono in particolare includere i sistemi di coordinate associati a sistemi di riferimento, un'ultima richiesta è che:
(c) la funzione (biettiva per (a) e (b)) $\mathbb{R}^4 \supset A \ni (t, p) \mapsto \gamma_p(t) \in M$ definisca una carta locale della struttura differenziabile di M.
L'assegnazione di C con la scelta del parametro privilegiato t, individua una campo differenziabile $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial t}$ di vettori di tipo tempo, X_p, per ogni punto dello spaziotempo $p \in M$. X_p è il vettore tangente in p (calcolato rispetto al parametro t) dell'unica curva di γ che passa per p. Viceversa C è quasi completamente ricostruito da $\mathbf{X}$ in termini delle curve integrali di tale campo vettoriale. In questa costruzione, il parametro delle curve integrali coincide con t a meno della scelta dell'origine su ciascuna curva, cioè *a meno di una costante additiva che dipende dalla curva.*
In base all'ultima osservazione giungiamo alla definizione *indebolita* di sistema di riferimento che useremo nel seguito evitando di fissare una nozione di *tempo globale*, cioè di fissare l'origine del parametro temporale t. In effetti, la seguente nozione di riferimento, se non è precisato altro, permette solo di fissare la posizione di ogni evento dello spaziotempo, ma non la posizione temporale, e ciò ne giustifica il nome.

Definizione 8.7. Un **sistema di riferimento spaziale X** in uno spaziotempo $(M, \mathbf{g})$ è un campo vettoriale differenziabile di tipo tempo $\mathbf{X}$ orientato verso il futuro.
Dato un evento $p \in M$, l'unica curva integrale γ_p di $\mathbf{X}$ che intercetta p è la **posizione spaziale** di p nel riferimento spaziale $\mathbf{X}$.
Un punto materiale è **in quiete** nel riferimento spaziale $\mathbf{X}$ se gli eventi sulla linea di universo del punto materiale hanno la stessa posizione spaziale in $\mathbf{X}$ $\diamondsuit$

Commenti 8.2.
(1) La nozione di punto materiale in quiete con un riferimento è stata data *indipendentemente da ogni nozione di spazio di quiete di un riferimento.* Tale definizione si estende ovviamente al caso di corpi costituiti di più di un punto materiale.
(2) Si osservi che non abbiamo ancora parlato delle nozioni metriche temporali e spaziali che si devono pensare associate con un riferimento spaziale $\mathbf{X}$. Nello spazio tangente a ciascun evento $p \in M$, possiamo comunque introdurre le *nozioni metriche locali*, come già detto precedentemente. Come già detto, lo spazio tangente T_pM è decomposto in una somma diretta ortogonale rispetto alla metrica $\mathbf{g}$:

$$L(X_p) \oplus \Sigma_{X_p} \,, \tag{8.28}$$

e valgono le interpretazioni fisiche precedentemente discusse. In particolare, se $\rho = \rho(u)$ è la linea di universo di un generico punto materiale, possiamo sempre decomporre il suo vettore tangente rispetto alla decomposizione ortogonale detta sopra di $T_{\rho(u)}M$:

$$\dot{\rho}(u) = \delta t X_{\rho(u)} + \delta \vec{X}_{\rho(u)} \, .$$

La **velocità** di ρ rispetto al riferimento spaziale $\mathbf{X}$ sarà allora data dal vettore di $\Sigma_{\rho(u)}$

$$v_{\rho(u)}|_{\mathbf{X}} := \frac{c}{\sqrt{-\mathbf{g}(X_{\rho(u)}|X_{\rho(u)})}} \frac{\delta \vec{X}_{\rho(u)}}{\delta t} \tag{8.29}$$

Il fattore $\frac{c}{\sqrt{-\mathbf{g}(X_{\rho(u)}|X_{\rho(u)})}}$ tiene semplicemente conto del fatto che la decomposizione (8.28) è riferita al vettore $X_{\gamma(t)}$ e non alla quadrivelocità vettore $V_{\gamma(t)}$, ovvero alla nozione di tempo t e non al tempo proprio τ valutato lungo le linee di universo del riferimento $\mathbf{X}$.
Malgrado la definizione introdotta di sistema di riferimento spaziale sia globale, la nozione appena usata di spazio di quiete con il riferimento $\Sigma_{\gamma(t)}$ è ancora locale, più precisamente relativa al solo spazio tangente. Apparentemente una definizione di spazio di quiete *in grande*, in comune per tutte le linee di universo di $\mathbf{X}$ può essere data da una sottovarietà tridimensionale S_0 che intersechi ogni linea di universo γ del riferimento in un corrispondente $\gamma(t_\gamma)$ e che sia tangente ad ogni $\Sigma_{\gamma(t_\gamma)}$ nei punti di intersezione. Si osservi che assegnando una tale sottovarietà S_0 si può fissare su S_0 l'origine del parametro t per ogni curva integrale di $\mathbf{X}$, dando luogo ad una nozione globale di tempo. Tuttavia vi sono situazioni in cui una tale sottovarietà , normale ad ogni curva integrale, non esiste, come vedremo più avanti. Daremo pertanto una nozione più generale di spazio di quiete di un riferimento spaziale $\mathbf{X}$.

Possiamo ora introdurre la nozione di spazio di quiete con un riferimento spaziale $\mathbf{X}$ definendo la nozione di *tempo universale*. L'idea è di decomporre lo spaziotempo come l'*unione disgiunta* di spazi tridimensionali S_u etichettati da un parametro u che definisce un *tempo universale*. In quest'ottica, ogni S_u definisce *lo spazio al tempo* u.
Per esplicitare in termini matematici quest'idea, il parametro u deve essere pensato assumere i valori di funzione differenziabile $U : M \to \mathbb{R}$ che soddisfa $dU \neq 0$ in ogni evento dello spaziotempo. In tal modo ciascuno degli elementi non vuoti della classe di insiemi di eventi della forma $S_u := \{p \in M \mid U(p) = u\}$, con $u \in \mathbb{R}$, acquista la struttura di sottovarietà embedded di dimensione 3, come ragionevole volendo definire una nozione di spazio al tempo fissato. Per costruzione risulta subito che, come detto sopra: (a) $S_u \cap S_{u'} = \emptyset$ se $u \neq u'$ e, (b) per ogni $p \in M$ esiste $u_p \in \mathbb{R}$ con $p \in S_{u_p}$. In altre parole M ammette una foliazione data dalle sottovarietà tridimensionali S_u.
Un'ulteriore richiesta, meno innocua di quanto potrebbe sembrare (e che giustificheremo più avanti) è che ogni S_u sia una sottovarietà di tipo spazio. Questo è equivalente a richiedere, in base alla proposizione provata sopra, che dU sia ovunque di tipo tempo. Si osservi che quest'ultima richiesta implica automaticamente che $dU \neq 0$ ovunque ed, anche, che dU possa solo essere ovunque orientato verso il futuro oppure ovunque orientato verso il passato, dato che la varietà

lorentziana $(M, \mathbf{g})$ è supposto temporalmente orientabile e temporalmente orientata.

Definizione 8.8. Se $(M, \mathbf{g})$ è uno spaziotempo, un **tempo universale** è una funzione differenziabile $U : M \to \mathbb{R}$, con dU di tipo tempo ovunque su M.
Se $u \in \mathbb{R}$ è tale che $S_u := \{p \in M \mid U(p) = u\} \neq \emptyset$, la sottovarietà embedded tridimensionale di tipo spazio S_u è detta **spazio al tempo (universale)** u.
Se $p \in M$, l'unica S_{u_p} che include p è la **posizione temporale** di p rispetto al tempo universale U.
$\diamondsuit$

Quando sono assegnati un *riferimento spaziale* $\mathbf{X}$ ed un *tempo universale* U, ci sono *due* nozioni di tempo: una è quella data dal parametro t delle linee integrali di $\mathbf{X}$ e l'altra il tempo universale U che definisce lo spazio S_u ad ogni tempo u. Perché queste due nozioni siano in accordo è sufficiente che $\mathbf{X}$ e U soddisfino il seguente requisito:

$$\langle dU, X \rangle = 1 \quad \text{ovunque su } M, \tag{8.30}$$

che può essere riscritta come:

$$\frac{d}{dt} U(\gamma(t)) = 1 \quad \text{per ogni curva integrale di } \mathbf{X}.$$

Questa identità equivale infine alla seguente condizione di evidente significato fisico. Per ogni curva integrale γ di $\mathbf{X}$ esiste una costante $c_\gamma \in \mathbb{R}$ tale che

$$U(\gamma(t)) = t + c_\gamma \quad \text{per ogni } t \text{ nell'intervallo di definizione di } \gamma. \tag{8.31}$$

Possiamo allora decidere di scegliere la costante additiva arbitraria insita nella definizione del parametro t di ogni curva integrale γ di $\mathbf{X}$ in modo tale che $c_\gamma = 0$ e quindi t coincida ovunque con u.

Nota 8.7. Si osservi che (8.31) implica banalmente che ogni curva integrale di $\mathbf{X}$ può intersecare ogni S_u *al più una volta*.

Sotto queste ipotesi è ragionevole interpretare ogni S_u come lo *spazio di quiete al tempo u del riferimento spaziale* $\mathbf{X}$ e pensare alla coppia $(\mathbf{X}, U)$ come un *sistema di riferimento* in M.

Definizione 8.9. Nello spaziotempo $(M, \mathbf{g})$, un sistema di riferimento spaziale $\mathbf{X}$ ed un tempo universale U sono detti **compatibili** se vale la condizione (8.30).
In tal caso, la coppia $(\mathbf{X}, U)$ con la scelta $c_\gamma = 0$ delle costanti in (8.31) per ogni linea integrale di $\mathbf{X}$ definisce un **sistema di riferimento** in M ed ogni spazio a tempo universale fissato S_u è detto **spazio di quiete al tempo** u del riferimento $(\mathbf{X}, U)$.
$\diamondsuit$

Nota 8.8. Nel seguito indicheremo un sistema di riferimento con la coppia $(\mathbf{X}, U)$ sottintendendo la scelta $c_\gamma = 0$ delle costanti in (8.31) per ogni linea integrale di $\mathbf{X}$.

Commenti 8.3.
(1) Se è assegnato un tempo universale U è facile costruire un riferimento spaziale $\mathbf{X}$ compatibile con esso oppure con il tempo universale $-U$. Tale campo vettoriale può essere costruito come segue assumendo che dU sia orientato verso il passato (in caso contrario la costruzione funziona per $-U$). Dato che dU è di tipo tempo si può scegliere con differenziabilità un campo vettoriale di tipo $\mathbf{Y}$ tempo orientato verso il futuro. Per costruzione $\langle dU, Y\rangle = Y^a(dU)^b g_{ab} =: f > 0$ ovunque nello spaziotempo. Conseguentemente il campo vettoriale $\mathbf{X}$ su M individuato, per ogni $p \in M$, dal vettore $X_p := f(p)^{-1}Y_p$ è ben definito, di tipo tempo futuro e soddisfa la condizione di compatibilità (8.30) rispetto a U.
(2) Una classe fisicamente importantissima di spazitempo, gli spazitempo *globalmente iperbolici* [5, 6, 26], in cui ricadono quasi tutti gli spazitempo interessanti per le applicazioni in fisica, ammettono sempre una funzione tempo universale ed una corrispondente foliazione data dalle varietà S_u in virtù delle proprietà geometriche da essi possedute. In tal caso tutte le sottovarietà S_u risultano anche essere diffeomorfe tra di esse, cosa non garantita nel caso generale.
(3) Nella cosiddetta *trattazione ADM delle equazioni di Einstein* [26] lo spaziotempo viene effettivamente decomposto usando un sistema di riferimento nel senso sopra definito. Il campo vettoriale $\mathbf{X}$ viene ulteriormente decomposto come

$$X^a = N(dU)^a + N^a$$

dove il campo vettoriale N^a è detto campo di *shift*, mentre il campo scalare N si dice *lapse function.* Tali oggetti giocano un importante ruolo nella soluzione delle equazioni di Einstein.
(4) Nel caso in cui si lavori nello spaziotempo di Minkowski $(\mathbb{M}^4, \boldsymbol{\eta})$, un esempio evidente di sistema di riferimento nel senso generalizzato appena definito, è dato da ogni sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$. In tal caso il campo $\mathbf{X}$ coincide con il campo $\partial_{\mathscr{F}}$, mentre il tempo universale U può essere preso come la coordinata temporale $t_{\mathscr{F}}$ di ogni sistema di coordinate minkowskiane che individua $\mathscr{F}$.

8.5.2 Il problema della metrica spaziale ed il legame con procedure di sincronizzazione non einsteiniane.

La domanda che ora ci poniamo è quale tipo di metrica ha senso fisico assegnare sopra ogni spazio di quiete di un riferimento $(\mathbf{X}, U)$ nel senso della definizione 8.9, richiedendo che tale metrica descriva le proprietà fisico-metriche dello spazio del riferimento che si possono investigare con strumenti di misura fisici quali regoli, teodoliti ecc. La domanda non è affatto banale. Come ricordato sopra, nel caso in cui si lavori nello spaziotempo di Minkowski $(\mathbb{M}^4, \boldsymbol{\eta})$, un esempio ovvio di sistema di riferimento nel senso generalizzato appena definito, è dato, seguendo la definizione 3.4 e la discussione che precede tale definizione, da ogni sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$. In tal caso il campo $\mathbf{X}$ coincide con il campo $\partial_{\mathscr{F}}$ ed è quindi normalizzato a -1, mentre il tempo universale U può essere preso come la coordinata temporale $t_{\mathscr{F}}$ di $\mathscr{F}$ come definita in

relatività speciale. In tal caso che la metrica sugli spazi di quiete del riferimento coincide, per costruzione, con la metrica indotta da quella $\boldsymbol{\eta}$ dello spaziotempo.
Possiamo ragionevolmente aspettarci che tale scelta abbia senso fisico un riferimento $(\mathbf{X}, U)$ in uno spaziotempo generico, $(M, \mathbf{g})$, quando gli spazi S_u risultino essere ovunque normali alle linee integrali del campo $\mathbf{X}$. In tal caso lo spazio tangente di ogni evento $p \in S_u$ coincide con il sottospazio Σ_{X_p} della decomposizione ortogonale (8.27) ereditandone le proprietà metriche.
Nel caso in cui S_u non sia normale ai sottospazi Σ_{X_p} la questione rimane aperta.
Osserviamo che la scelta delle ipersuperfici S_u come spazi di quiete sono individuate come il luogo degli eventi in cui gli orologi delle linee di universo del riferimento spaziale $\mathbf{X}$, che segnano il tempo universale U, segnando un valore comune u. Quindi l'assegnazione delle ipersuperficie S_u corrisponde, dal punto di vista fisico, ad una precisa procedura di sincronizzazione degli orologi *in quiete* nel riferimento. Deve essere chiaro che tali orologi non sono orologi ideali nel caso generale, dato che valutano un tempo universale che non coincide, in generale, con il tempo proprio delle linee di universo del riferimento. Tuttavia, per esempio nello spaziotempo di Minkowski, può comunque accadere che U coincida con il tempo proprio delle linee di universo di $\mathbf{X}$, ma gli spazi di quiete S_u a U costante non coincidano comunque con sottovarietà tridimensionali perpendicolari a $\mathbf{X}$. Si può facilmente produrre un riferimento di questo genere in $(\mathbb{M}^4, \boldsymbol{\eta})$, definendo $\mathbf{X}$ come $\partial_{\mathscr{F}}$ per un sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$, ma scegliendo l'origine del tempo proprio di tutte le linee integrali di $\partial_{\mathscr{F}}$ sullo spazio di quiete $\Sigma_{\mathscr{F}', t'_0}$ di un *altro* sistema di riferimento $\mathscr{F}' \neq \mathscr{F}$, per un fissato valore del tempo t'_0 di $\mathscr{F}'$. In questo modo viene a definirsi una funzione di tempo universale U, che coincide ancora con il tempo proprio su ciascuna linea integrale di $\partial_{\mathscr{F}}$, ma tale che le sottovarietà a U costante, S_u, sono ottenute con traslazioni rigide, lungo le linee integrali di $\partial_{\mathscr{F}}$ dello spazio di quiete $\Sigma_{\mathscr{F}', t'_0}$. Pertanto le S_u non sono mai perpendicolari a $\partial_{\mathscr{F}}$. Tuttavia la coppia $(\mathbf{X}, U)$ costruita in questo modo definisce un sistema di riferimento nel senso generale. Nel sistema di riferimento costruito in questo modo gli orologi ideali portati da ciascuna linea di universo del riferimento devono essere stati sincronizzati in modo *differente* da quanto stabilito nella procedura di sincronizzazione di Einstein che, come sappiamo, corrisponde ad avere spazi di quiete perpendicolari alle curve integrali di $\partial_{\mathscr{F}}$. Tuttavia non è chiaro, dal punto di vista sperimentale, in cosa consista tale nuova procedura di sincronizzazione. Se sapessimo come misurare le distanze sugli spazi di quiete S_u e conoscessimo il valore della velocità della luce c' nelle varie direzioni lungo percorsi aperti (che non è detto coincidere ancora con c in ogni direzione), la procedura di sincronizzazione potrebbe allora essere descritta, similmente a quella einsteiniana, imponendo che la velocità della luce abbia il valore c' quando valutata tra due orologi in quiete nel riferimento considerato e posti distanza nota. Avremmo in tal modo anche una possibile procedura fisica per costruire materialmente il sistema di riferimento $(\mathbf{X}, U)$ in $(\mathbb{M}^4, \boldsymbol{\eta})$.
In realtà abbiamo due informazioni sulle quali possiamo contare: (1) l'evidenza sperimentale che il valore della velocità della luce è costante e vale c su ogni percorso *chiuso* di "andata e ritorno" lungo un qualsiasi cammino fermo in ogni sistema di riferimento se valutata con un orologio ideale (cioè rispetto al tempo proprio), (2) le particelle di luce sono descritte nello spaziotempo da curve di tipo luce (geodetiche), come osservato alla fine della sezione 8.3.1.
Mostriamo come, assumendo la validità di (1) nel caso più generale possibile per i sistemi di

riferimento della definizione 8.9 ed usando (2), sia possibile assegnare una metrica in negli spazi di quiete di un generico riferimento $(\mathbf{X}, U)$ e come, a posteriori, si possa interpretare la scelta degli spazi S_u in termini di una precisa procedura di sincronizzazione, almeno nel caso in cui U sia il tempo proprio lungo le linee di universo del riferimento.

In uno spaziotempo generico $(M, \mathbf{g})$, consideriamo un riferimento $(\mathbf{X}, U)$ nel senso della definizione 8.9. Fissiamo un evento $p \in M$ in modo tale che $p \in S_{u_p}$ con $u_p = U(p)$. Consideriamo un secondo evento nello stesso spazio di quiete $q \in S_{u_p}$, idealmente infinitamente prossimo a p, che sia individuato dal vettore $Y_p \in T_p S_{u_p}$. Consideriamo quindi una particella di luce che, partendo dalla linea di universo del riferimento che contiene p, arrivi a quella che contiene q e ritorni sulla linea di universo di p. Le due parti della storia della particella di luce saranno descritte da due vettori nulli che, data l'infinitesimalità del processo possiamo pensare nello spazio tangente di p: $N_+ \in T_pM$ e $N_- \in T_pM$. Possiamo decomporre questi vettori come

$$N_\pm = \delta u_\pm X_p \pm Y_p$$

dove $\delta u_\pm \geq 0$. La richiesta che $N_\pm$ sia di tipo luce implica che:

$$\mathbf{g}(\delta u_\pm X_p \pm Y_p | \delta u_\pm X_p \pm Y_p) = 0$$

che si sviluppa come:

$$(\delta u_\pm)^2 \mathbf{g}(X_p|X_p) \pm 2\delta u_\pm \mathbf{g}(X_p|Y_p) + \mathbf{g}(Y_p|Y_p) = 0 \, .$$

Queste relazioni permettono infine di ricavare, tenendo esplicitamente conto del vincolo $\delta u_\pm \geq 0$, di $-\mathbf{g}(X_p|X_p) > 0$ e di $\mathbf{g}(Y_p|Y_p) \geq 0$:

$$\delta u_\pm = \frac{\pm \mathbf{g}(X_p|Y_p)}{-\mathbf{g}(X_p|X_p)} + \frac{\sqrt{\mathbf{g}(X_p|Y_p)^2 - \mathbf{g}(X_p|X_p)\mathbf{g}(Y_p|Y_p)}}{-\mathbf{g}(X_p|X_p)} \, .$$

L'intervallo di tempo universale totale, perchè la luce compia il percorso di andata e ritorno, è quindi:

$$\delta u = 2\frac{\sqrt{\mathbf{g}(X_p|Y_p)^2 - \mathbf{g}(X_p|X_p)\mathbf{g}(Y_p|Y_p)}}{-\mathbf{g}(X_p|X_p)} \, . \tag{8.32}$$

Moltiplicando i due membri per $\frac{\sqrt{-\mathbf{g}(X_p|X_p)}}{c}$ otteniamo il corrispondente *intervallo di tempo proprio*, rispetto alla linea di universo del riferimento $(\mathbf{X}, U)$ passante per p:

$$\delta\tau = \frac{2}{c}\sqrt{\mathbf{g}(Y_p|Y_p) + \frac{\mathbf{g}(X_p|Y_p)\mathbf{g}(X_p|Y_p)}{-\mathbf{g}(X_p|X_p)}} \, . \tag{8.33}$$

Se infine teniamo conto del requisito (2), affinchè la velocità della luce calcolata sul percorso "andata e ritorno" considerato valga ancora c, dobbiamo concludere che la *lunghezza spaziale nello spazio di quiete* S_u del vettore Y_p deve valere:

$$L_{Y_p} = c\delta\tau/2 = \sqrt{\mathbf{g}(Y_p|Y_p) + \frac{\mathbf{g}(X_p|Y_p)\mathbf{g}(X_p|Y_p)}{-\mathbf{g}(X_p|X_p)}} \tag{8.34}$$

In altre parole la lunghezza di Y_p, cioè la distanza tra p e l'evento q infinitamente prossimo a p, entrambi nello spazio di quiete del riferimento $(\mathbf{X}, U)$, è quella indotta dalla metrica $\mathbf{h}_{S_u}$ definita su S_u dall'assegnazione delle forme bilineari:

$$h_p(Y_p|Z_p) := \mathbf{g}(Y_p|Z_p) + \frac{\mathbf{g}(X_p|Y_p)\mathbf{g}(X_p|Z_p)}{-\mathbf{g}(X_p|X_p)} \quad \text{per ogni } Y_p, Z_p \in T_pS_{u_p}. \tag{8.35}$$

Si osservi che h_p è definita su tutto lo spazio tengente in p mentre $\mathbf{h}_{S_u}$ ne è la restrizione ai vettori tangenti alla superficie S_u. La metrica $\mathbf{h}_{S_u}$ definita su S_u è la metrica che corrisponde alle operazioni fisiche di calcolo di lunghezze ed angoli nello spazio di quiete S_u del riferimento $(\mathbf{X}, U)$.

Dopo che abbiamo introdotto la metrica $\mathbf{h}_p$ con motivazioni fisiche, possiamo chiarirne il significarto geometrico. Fissato il vettore X_p di tipo tempo tangente a p, un secondo vettore Y_p tangente allo spaziotempo in p può essere decomposto ortogonalmente come:

$$Y_p = Y_p' + \frac{\mathbf{g}(Y_p|X_p)X_p}{\mathbf{g}(X_p|X_p)} \; .$$

In questa decomposizione ortogonale Y_p' si trova nel sottopazio ortogonale a X_p, quindi costituito da soli vettori di tipo spazio. L'applicazione lineare:

$$P_{X_p} : Y_p \mapsto Y_p' \,, \quad Y_p' := Y_p - \frac{\mathbf{g}(Y_p|X_p)X_p}{\mathbf{g}(X_p|X_p)}$$

è un proiettore che estrae la parte di Y_p che giace nello spazio di quiete con l'osservatore microscopico che evolve lungo X_p. Si verifica immediatamente facendo il calcolo esplicito che:

$$h_p(Y_p|Z_p) = \mathbf{g}(P_{X_p}Y_p|P_{X_p}Z_p) \quad \text{per ogni coppia di vettori } Y_p.Z_p \in T_pM. \tag{8.36}$$

Di conseguenza, la forma quadratica h_p è almeno semidefinita positiva ed ha un ben preciso significato geometrico legato alla struttura metrica standard dello spaziotempo.

Commenti 8.4.
(1) La metrica $\mathbf{h}_{S_u}$ è effettivamente una metrica riemanniana, cioè definita positiva. Questo segue dal fatto che la restrizione di $\mathbf{g}$ alla sottovarietà S_u di tipo spazio individua una metrica definita positiva come provato nella proposizione 3.2 e la forma bilineare simmetrica

$$T_pM \times T_pM \ni (X_p, Y_p) \mapsto \frac{\mathbf{g}(X_p|Y_p)\mathbf{g}(X_p|Z_p)}{-\mathbf{g}(X_p|X_p)}$$

è semidefinita positiva per costruzione.
(2) Nel caso in cui le linee di universo del sistema di riferimento sono normali agli spazi di quiete, cioè quando X_p è normale a T_pS_u, quindi in particolare considerando sistemi di riferimento inerziali in $(\mathbb{M}^4, \boldsymbol{\eta})$, la metrica $\mathbf{h}_{S_u}$ coincide con quella indotta su S_u dalla metrica dello spaziotempo $\mathbf{g}$ in accordo con le nostre assunzioni nel costruire il formalismo della relatività

speciale.
(3) Avendo a disposizione una metrica spaziale possiamo calcolare la velocità di un punto materiale in moto nel riferimento $(\mathbf{X}, U)$. Se le linee di universo di $\mathbf{X}$ non sono normali agli spazi di quiete individuati dal tempo universale U, tale nozione di velocità risulterà in generale differente da quella calcolata come in (8.29), in cui si usava solo la struttura di $\mathbf{X}$. Lo spazio tangente T_pM è decomposto in una somma diretta (non ortogonale in generale rispetto alla metrica $\mathbf{g}$):

$$L(X_p) \oplus T_pS_{u_p} \,, \tag{8.37}$$

In particolare, se $\rho = \rho(t)$ è la linea di universo di un generico punto materiale, possiamo sempre decomporre il suo vettore tangente rispetto alla decomposizione diretta detta sopra di $T_{\rho(t)}M$:

$$\dot{\rho}(t) = \delta u X_{\rho(t)} + \delta \vec{Y}_{\rho(t)} \,. \tag{8.38}$$

La **velocità** di ρ rispetto al riferimento spaziale $\mathbf{X}$ sarà allora data da

$$v_{\rho(t)}|_{(\mathbf{X},U)} := \frac{c}{\sqrt{-\mathbf{g}(X_{\rho(u)}|X_{\rho(u)})}} \frac{\delta \vec{Y}_{\rho(t)}}{\delta u} \tag{8.39}$$

Il fattore $\frac{c}{\sqrt{-\mathbf{g}(X_{\rho(u)}|X_{\rho(u)})}}$ tiene, al solito, conto del fatto che la decomposizione (8.37) è riferita al vettore $X_{\gamma(u)}$ e non alla quadrivelocità vettore $V_{\gamma(u)}$, ovvero alla nozione di tempo universale u e non al tempo proprio τ valutato lungo le linee di universo del riferimento $\mathbf{X}$.
Usando l'espressione trovata e considerando una particella luminosa descritta da $\rho = \rho(t)$, si ricava il valore della velocità della luce in funzione del vettore $\vec{Y}_{\rho(t)}$ nella decomposizione (8.38)

$$||v_{\rho(t)}|_{(\mathbf{X},U)}|| = \frac{c}{1 + \frac{\mathbf{g}(X_{\rho(t)}|\delta\vec{Y}_{\rho(t)})}{\sqrt{-\mathbf{g}(X_{\rho(t)}|X_{\rho(t)})}||\delta\vec{Y}_{\rho(t)}||}}$$

la norma $||\cdot||$ è quella associata alla metrica $\mathbf{h}_{S_u}$. Si noti che in realtà l'espressione trovata dipende solo dalla direzione di $\vec{Y}_{\rho(t)}$ ma non dalla sua lunghezza. In definitiva possiamo scrivere che, nel riferimento $(\mathbf{X}, U)$, la velocità della luce valutata attorno all'evento p e nella direzione N_p, dove $N_p \in T_pS_{U(p)}$ ed ha norma unitaria rispetto alla metrica naturale del sistema di riferimento $\mathbf{h}_{S_{U(p)}}$, vale:

$$c(p, N_p)|_{(\mathbf{X},U)} = \frac{c}{1 + \frac{\mathbf{g}(X_p|N_p)}{\sqrt{-\mathbf{g}(X_p|X_p)}}} \tag{8.40}$$

Si dimostra facilmente che il denominatore è sempre strettamente positivo nelle ipotesi fatte. Si osservi che cambiando segno a N_p il valore della velocità della luce cambia. Si noti che, malgrado la velocità della luce dipenda dal tempo, dal posto e dalla direzione, per costruzione deve essere comunque rispettato il requisito fisico che la velocità della luce su un percorso chiuso abbia il solito valore costante c.
(4) L'espressione trovata (8.40) per il valore della velocità della luce definisce[3] la *procedura*

[3]a livello infinitesimo nel caso generale.

di sincronizzazione che si deve adoperare sperimentalmente per sincronizzare gli orologi (che segnano il tempo universale e non quello proprio se $\mathbf{g}(X_p|X_p) \neq -1$) per costruire lo spazio di quiete del riferimento di cui si è discusso precedentemente. Si osservi che la velocità della luce risulta avere il solito valore c isotropicamente ed omogeneamente su uno spazio di quiete S_u se e solo se $\mathbf{g}(X_p|N_p) = 0$ per ogni versore N_p e per ogni $p \in S_u$. Questo equivale a dire, come ci si aspettava, che le linee di universo del riferimento sono normali allo spazio di quiete del riferimento S_u. Si osservi che in tal caso la sincronizzazione usata per costruire lo spazio di quiete è quella di Einstein solo se $\mathbf{g}(X_p|X_p) = -1$, cioè se il tempo universale coincide con il tempo proprio delle curve di universo del riferimento.
(5) Se ammettiamo che sottovarietà ad U costante, nella definizione di tempo universale e quindi di sistema di riferimento, possano non essere di tipo spazio, alcune delle formule precedenti continuano ad essere valide, ma possono nascere patologie di vario genere (del tipo di velocità infinite), lasciamo al lettore l'analisi di tali situazioni. Questo fatto, in definitiva, giustifica la nostra scelta di richiedere che dU fosse di tipo tempo.

8.5.3 Lo spazio di quiete del sistema di riferimento rotante.

A titolo di esempio applichiamo il formalismo introdotto in un caso elementare che comunque ha un certo interesse fisico. Consideriamo, nello spaziotempo di Minikowski $(\mathbb{M}^4, \boldsymbol{\eta})$, un sistema di riferimento inerziale $\mathscr{F}$ ed un sistema di coordinate minkowskiane x^0, x^1, x^2, x^3 solidali con $\mathscr{F}$. Passiamo infine ad un nuovo sistema di coordinate locali cilindriche t, r, ϕ, z, individuate da $t = x^0 \in \mathbb{R}$, $r \in (0, +\infty)$, $\phi \in (-\pi, \pi)$, $z = x^3 \in \mathbb{R}$, dove si assume anche $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ e $x^1 = r\cos\phi$, $x^2 = r\sin\phi$. Per concludere, consideriamo un terzo sistema di coordinate definite dalle richieste, se $\omega > 0$ è una certa costante fissata: $t' := t$, $r' := r$, $z' := z$ ma $\phi' := \phi + \omega t$. Le coordinate t', r', ϕ', z' sono dette, per ovvi motivi, **coordinate del riferimento rotante**. In realtà tali coordinate definiscono un sistema di riferimento $(\mathbf{X}, U)$ nel senso generale su $(\mathbb{M}^4, \boldsymbol{\eta})$ scegliendo come campo vettoriale $\mathbf{X}$ quello individuato dalle linee integrali di $\partial_{t'}$ ed adoperando come tempo universale la coordinata t'. Questo sistema di riferimento è detto **sistema di riferimento rotante**. Si trova dalla definizione che:

$$X := \partial_{t'} = \partial_t - \omega\partial_\phi \tag{8.41}$$

Osservando che:

$$\boldsymbol{\eta} = -c^2 dt \otimes dt + dr \otimes dr + r^2 d\phi \otimes d\phi + dz \otimes dz\,,$$

concludiamo che:

$$\boldsymbol{\eta} = (-c^2 + \omega^2 r^2) dt' \otimes dt' + dr' \otimes dr' + r'^2 d\phi' \otimes d\phi' + dz' \otimes dz' - r'^2 \omega \left(d\phi' \otimes dt' + dt' \otimes d\phi'\right)\,, \tag{8.42}$$

in particolare:

$$\boldsymbol{\eta}(\partial_{t'}|\partial_{t'}) = -c^2 + \omega^2 r^2\,,$$

e quindi il parametro t' non coincide con il tempo proprio delle curve integrali di $\partial_{t'}$. Si osservi ancora che, dall'identità di sopra, si evince che il campo vettoriale $\mathbf{X}$ che stiamo considerando è di tipo tempo solo quando $r < c/\omega$ e allora ci restringiamo a lavorare in tale regione dello spaziotempo, considerandola come lo spazitempo completo. Si osservi che $dt' = dt$ e pertanto definendo il tempo universale U come t', abbiamo effettivamente una funzione differenziabile il cui differenziale è di tipo tempo. L'idea intuitiva che ci guida nelle definizioni che stiamo dando è che lo spazio di quiete di $(\mathbf{X}, U)$, definito come appena detto, sia dato dalle sottovarietà a t' costante, dato che le coordinate r', ϕ', z' sono un sistema di coordinate ammissibili su tali sottovarietà . Si osservi che risultando da (8.42):

$$\boldsymbol{\eta}(\partial_{t'}|\partial_{\phi'}) = \boldsymbol{\eta}(\partial_t - \omega\partial_\phi|\partial_\phi) = -\omega r^2$$

abbiamo che lo spazio di quiete del riferimento non è ortogonale alle curve di universo del riferimento. La metrica spaziale del riferimento non sarà allora quella indotta da $\boldsymbol{\eta}$ sulle varietà a t' costante, ma sarà invece data dalla formula (8.35). Nel caso specifico si ottiene subito che, in riferimento alle coordinate $x'^1 := r', x'^2 := \phi', x'^3 = z'$ possiamo scrivere che la metrica spaziale del riferimento rotante, su ogni spazio a t' costante è individuata dalla matrice di coefficienti:

$$h_{ij} = c_{ij} + \frac{r^4\omega^2}{c^2 - \omega^2 r^2}\delta_{i\phi'}\delta_{j\phi'} \tag{8.43}$$

dove c_{ij} individuano la della metrica euclidea standard in coordinate cilindriche:

$$c_{ij}dx'^i \otimes dx'^j = dr' \otimes dr' + r'^2 d\phi' \otimes d\phi' + dz' \otimes dz' \ . \tag{8.44}$$

Si osservi che le differenze di coordinata r' misurano effettivamente la lunghezza di segmenti fermi nel riferimento posti nella direzione radiale, e la stessa cosa accade per le differenze di coordinate z che misurano la lunghezza di segmenti in quiete nel riferimento e posti nella direzione verticale z'. Questo accade in virtù del fatto che dato che i termini correttivi nella metrica (8.43) rispetto alla metrica euclidea standard, intervengono solo nella direzione angolare. Viceversa le cose cambiano drasticamente nella direzione angolare. Si verifica per esempio subito che, in base a tale metrica, la lunghezza della circonferenza di raggio R vale:

$$\frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}} \tag{8.45}$$

che è quanto ci sia aspettava da un'analisi intuitiva basata sull'uso diretto della trasformazione di Lorentz. La velocità della luce sarà in generale differente da c e dipenderà dalle direzioni. In particolare nella direzione radiale e verticale essa assume il solito valore c, mentre nella direzione della coordinata ϕ' si hanno i due valori:

$$c_\pm = \frac{c}{1 \mp \frac{r\omega}{c}} \ ,$$

a seconda del verso. Unfatti c_+ corrisponde alla velocità della luce in direzione tangenziale contraria al verso di rotazione delle sistema rotante rispetto a quello inerziale, mentre c_- corrisponde alla velocità della luce nel verso opposto. Lasciamo la dimostrazione della formula scritta

sopra al lettore.
Una domanda che ci si può porre è se sia possibile definire un'altra nozione di spazio di quiete del riferimento rotante (cioè del riferimento spaziale individuato dalle sole curve integrali di $\partial_{t'}$) in modo tale che tale nuovo spazio di quiete risulti ovunque normale a $\partial_{t'}$ e quindi la velocità della luce abbia valore costante c ovunque ed in ogni direzione. Osserviamo che, in particolare, questo nuovo spazio di quiete esisterebbe se fosse possibile sincronizzare gli orologi in moto con le curve integrali di $\partial_{t'}$ usando la procedura di sincronizzazione di Einstein. La risposta come ora vedremo è negativa e quindi, in particolare, ne consegue che è anche impossibile sincronizzare gli orologi del sitema rotante facendo uso della procedura di Einsetein).

La dimostrazione di impossibilità richiede l'uso della teoria delle forme differenziali. Ammettiamo che esista una sottovarietà embedded di dimensione 3 ovunque normale a $\partial_{t'}$. Questo significa che la forma covariante di $\partial_{t'}$:

$$(\partial_{t'})_a = (dt)_a - \omega r'^2 (d\phi')_a$$

deve essere parallelo al covettore normale alla 3-varietà detta. A meno di un fattore non nullo, $dt - \omega r'^2 d\phi'$ deve dunque coincidere con il differenziale di una funzione che si annulla esattamente sulla sottovarietà . In altre parole, nell'intorno di ogni punto della sottovarietà , devono esistere due funzioni differenziabili $\alpha \neq 0$ e f tali che:

$$\alpha \left(dt - \omega r'^2 d\phi'\right) = df \; .$$

Conseguentemente, applicando l'operatore d e definendo $\beta := -\ln|\alpha|$:

$$-2\omega r' dr' \wedge d\phi' = d(1/\alpha) \wedge df = -d(\ln|\alpha|) \wedge (1/\alpha) df = d\beta \wedge (dt - \omega r'^2 d\phi') \; .$$

Concludiamo che, nelle ipotesi fatte, deve esistere una funzione differenziabile β, nell'intorno di ogni punto della sottovarietà che assumiamo esistere, che soddisfi:

$$-2\omega r' dr' \wedge d\phi' = d\beta \wedge dt - \omega r'^2 d\beta \wedge d\phi' \; . \tag{8.46}$$

Sviluppando il differenziale di β:

$$d\beta = \frac{\partial \beta}{\partial t'} dt' + \frac{\partial \beta}{\partial r'} dr' + \frac{\partial \beta}{\partial \phi'} d\phi' + \frac{\partial \beta}{\partial z'} dz'$$

inserendo nell'identità (8.46) e raccogliendo i vari fattori si ottengono subito le due condizioni, incompatibili se $\omega \neq 0$:

$$-2\omega r' = -\omega r'^2 \frac{\partial \beta}{\partial r'} \; , \qquad 0 = \frac{\partial \beta}{\partial r'} \; .$$

Concludiamo che è impossibile trovare una nozione di spazio di quiete per il riferimento rotante che sia perpendicolare alle curve di universo del riferimento.

Appendice A

Richiami di geometria affine e strutture differenziabili associate.

A.1 Spazi affini

Uno **spazio affine reale n-dimensionale**, $\mathbb{A}^n$ è una terna $(\mathbb{A}^n, V, \overrightarrow{\cdot})$ dove $\mathbb{A}^n$ è un insieme i cui elementi sono detti **punti**, V è uno spazio vettoriale reale n-dimensionale detto **spazio delle traslazioni** o **spazio dei vettori liberi** e $\overrightarrow{\cdot} : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \to V$ è una funzione che gode delle due seguenti proprietà
(i) per ogni coppia di elementi $P \in \mathbb{A}^n$, $v \in V$ c'é un *unico* punto $Q \in \mathbb{A}^n$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$.
(ii) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ per ogni terna $P, Q, R \in \mathbb{A}^n$.
$\overrightarrow{PQ}$ è detto vettore con **punto iniziale** P e **punto finale** Q.
Spesso si usa la notazione $Q - P$ per indicare $\overrightarrow{PQ}$. Un'altra notazione comoda è la seguente. Se $P \in \mathbb{A}^n$ e $v \in V$, $P + v \in \mathbb{A}^n$ indica l'unico punto Q in $\mathbb{A}^n$ tale che $Q - P = v$.
Una **retta** uscente da $P \in \mathbb{A}^n$ con vettore tangente $m \in V$ è l'applicazione $\mathbb{R} \ni t \mapsto P + tm \in \mathbb{A}^n$. Un **segmento** (di retta) si ottiene limitando t ad un intervallo di $\mathbb{R}$.
(Dal punto di vista insiemistico due rette uscenti dallo stesso punto con vettori tangenti proporzionali secondo un numero reale non nullo coincidono). Uno spazio affine dotato di un prodotto scalare (vedi Appendice B) definito nello spazio delle traslazioni è detto **spazio euclideo**.

A.2 Trasformazioni affini, coordinate cartesiane e strutture differenziabili associate.

Una funzione $\phi : \mathbb{A}^n_1 \to \mathbb{A}^m_m$ è detta **trasformazione affine** se è invariante per traslazioni (cioé $\phi(P + u) - \phi(Q + u) = \phi(P) - \phi(Q)$ per ogni $P, Q \in \mathbb{A}^n$ e ogni $u \in V_1$ spazio delle traslazioni di $\mathbb{A}^n_1$) e $L_\phi : P - Q \mapsto \phi(P) - \phi(Q)$ definisce una trasformazione lineare da V_1 a V_2 spazio delle traslazioni di $\mathbb{A}^m_2$. Le trasformazioni affini conservano la struttura di spazio affine.

Ogni spazio affine $\mathbb{A}^n$ ammette una struttura di varietà topologica e C^∞ differenziabile naturale indotta da una classe di sistemi di coordinate globali naturali tra di loro compatibili detti **sistemi di coordinate cartesiane**. Un tale sistema di coordinate si costruisce come segue. Si fissi $O \in \mathbb{A}^n$ ed una base $e_1, \ldots, e_n$ dello spazio delle traslazioni V. Variando $P \in \mathbb{A}^n$, le componenti di ogni vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base scelta, definiscono una funzione biettiva $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}^n$. La topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$ induce tramite f una topologia su $\mathbb{A}^n$ (definendo gli aperti di $\mathbb{A}^n$ come le controimmagini degli aperti di $\mathbb{R}^n$) che lo rende spazio topologico omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ e quindi una varietà topologica di dimensione n. Si verifica facilmente che la topologica definita in tal modo non dipende dalla scelta di O e nemmeno dalla scelta della base in V. Ulteriormente la funzione f definisce da sola un atlante C^∞ su $\mathbb{A}^n$ e dota tale spazio di una struttura differenziabile generata da tale atlante. In tal contesto la funzione f è detta **sistema di coordinate cartesiane** (di origine O e assi $e_1, \ldots, e_n$). Se $g : \mathbb{A}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'altro sistema di coordinate cartesiane $f \circ g^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono C^∞ in quanto, come si prova subito sono trasformazioni lineari non omogenee. Quindi la struttura differenziabile individuata da g è la stessa individuata da f.
Se $\phi : \mathbb{A}^n_1 \to \mathbb{A}^m_m$ è una trasformazione affine, si prova immediatamente che, scelte coordinate cartesiane in entrambi gli spazi affini $f : \mathbb{A}^n_1 \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{A}^m_2 \to \mathbb{R}^m$, la funzione ϕ rappresentata in tali coordinate, $g \circ \phi \circ f^{-1}$, ha la forma di una trasformazione lineare non omogenea da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$:

$$x^i_2 = \sum_{j=1}^{n} L^i{}_j x^j + c^i \,.$$

Viceversa ogni trasformazione $\phi : \mathbb{A}^n_1 \to \mathbb{A}^m_m$, che per una scelta di sistemi di coordinate cartesiane nei due spazi affini ha la forma lineare omogenea scritta sopra, è necessariamente una trasformazione affine. Si vede subito che le trasformazioni affini sono quindi differenziabili e, se sono biettive, sono diffeomorfismi con inversa data ancora da una trasformazione affine.

A.3 Isomorfismo naturale tra $T_p\mathbb{A}^n$ e lo spazio delle traslazioni.

Consideriamo un punto $p \in \mathbb{A}^n$ ed una curva differenziabile $\rho : [0, \epsilon) \to \mathbb{A}^n$ uscente da p. Il vettore tangente a ρ in p può essere definito in due modi diversi corrispondenti rispettivamente alla nozione elementare di "vettore applicato" e "vettore libero": (i) come un elemento di $T_p\mathbb{A}^n$, $\dot\rho(p)$, oppure (ii) come un elemento dello spazio delle traslazioni V:

$$\dot\rho^{(V)}(p) = \lim_{h\to 0} \frac{\overrightarrow{\rho(0)\rho(h)}}{h} \,.$$

Al variare di tutte le curve, l'applicazione $\dot\rho(p) \mapsto \dot\rho^{(V)}(p)$ definisce un isomorfismo naturale $\mathbb{L}_p : T_p\mathbb{A}^n \to V$. In particolare, se $e_1, \ldots, e_n$ è una base di V e $\phi : \mathbb{A}^n \ni p \mapsto (x^1(p), \ldots, x^n(p))$ è il sistema di coordinate cartesiane generate dalla base detta e centrate in $O \in \mathbb{A}^n$, risulta subito che, per $i = 1, \dots, n$:

$$\mathbb{L}_p \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = e_i \, .$$

L'esistenza dell'isomorfismo detto ha la conseguenza determinante che permette di definire una somma tra vettori appartenenti a due spazi tangenti in punti differenti p e q: i vettori devono essere "trasportati" in V tramite $\mathbb{L}_p^{-1}$ e $\mathbb{L}_q^{-1}$ dove possono essere sommati. Ovviamente il risultato è un vettore di V.

A.4 Induzione di tensori (pseudo)metrici su ogni $T_p\mathbb{A}^n$.

Consideriamo uno spazio affine n-dimensionale $\mathbb{A}^n$ e dotiamolo della struttura di varietà differenziabile naturale come detto sopra. Se V, spazio delle traslazioni, è dotato di uno (pseudo)prodotto scalare (Appendice B) possiamo indurre un analogo (pseudo)prodotto scalare g su ogni spazio tangente $T_p\mathbb{A}^n$ tramite l'isomorfismo naturale $\mathbb{L}_p$ sopra definito. A tale fine, per ogni $p \in \mathbb{A}^n$ e $u, v \in T_p\mathbb{A}^n$ definiamo

$$g_p(u|v) := g(\mathbb{L}_p u|\mathbb{L}_p v) \, .$$

g_p risulta esser uno (pseudo)prodotto scalare della stessa segnatura di g. È immediato provare che, al variare di p, le componenti di $g_p(u|v)$ nelle basi di $T_p\mathbb{A}^n$ associate ad un sistema di coordinate cartesiane sono costanti e quindi, in particolare, differenziabili. Come conseguenza $\mathbb{A}^n$ dotato del campo tensoriale doppio non degenere $\mathbf{g}_g$ definito in ogni punto dal prodotto scalare g_p rende $\mathbb{A}^n$ una varietà (pseudo)riemanniana (vedi Appendice B). Se $e_1, \dots, e_n$ è una base in V (pseudo)ortonormale per g (vedi Appendice B), il sistema di coordinate cartesiane generato da tale base in un punto $O \in \mathbb{A}^n$, è detto sistema di coordinate cartesiane **(pseudo)ortonormali**. È immediato verificare che $\mathbf{g}_g$ sopra definito assume forma canonica nelle basi associate a tali coordinate in ogni punto della varietà.

Appendice B

Richiami di geometria differenziale (pseudo)riemanniana.

B.1 Prodotti scalari e pseudo prodotti scalari.

Una forma quadratica g sullo spazio vettoriale reale V è detta **non degenere** se $g(u|v) = 0$ per ogni $u \in V$ implica $v = 0$. Si verifica subito che, se V ha dimensione finita, g è non degenere se e solo se il determinante della matrice simmetrica G che rappresenta la forma quadratica su una base dello spazio V è non nullo, cioè la matrice G è non singolare.
Mettiamoci preventivamente nel caso $V = \mathbb{R}^n$ in cui le forme quadratiche sono matrici simmetriche (espresse nella base canonica) per costruzione. La **segnatura** di una forma quadratica non degenere g definita su $V = \mathbb{R}^n$, è la coppia ordinata (m, p), dove $m + p = n$, associata a g come segue. Si consideri una trasformazione di congruenza $g' = D^t g D$, dove D è una opportuna matrice reale $n \times n$ non singolare in modo tale che g' risulti diagonale e che ammetta sulla diagonale solo i numeri ± 1. Nella segnatura, m è il numero di volte in cui appare -1 mentre p è il numero di volte in cui appare $+1$ su tale diagonale. Il **teorema di Sylvester** [9] assicura che (i) la matrice D suddetta esiste e (ii) ogni altra matrice reale $n \times n$ non singolare che trasformi per congruenza g in una matrice diagonale con soli ± 1 sulla diagonale principale, conserva la segnatura. Quindi la segnatura è ben definita ed è una proprietà di g.
Si osservi che se V è ora un generico spazio vettoriale reale a n dimensioni e g è rappresentata dalla matrice G nella base $e_1, \ldots, e_n$, e $\tilde{D}$ è una matrice $n \times n$ non singolare di componenti $\tilde{D}_{ik}$, $\tilde{G} = \tilde{D}^t G \tilde{D}$ rappresenta la stessa forma quadratica g nella base $\tilde{e}_k = \sum_h \tilde{D}_{hk} e_h$. Di conseguenza, il teorema di Sylvester assicura che si possa definire univocamente la segnatura di g anche in questo caso generale: la **segnatura di** g è la segnatura della matrice G che rappresenta g su una base qualsiasi di V. Tale definizione, in virtù della seconda parte del teorema di Sylvester non dipende dalla base scelta.
La segnatura di una forma quadratica g su uno spazio vettoriale reale V di dimensione n è detta **euclidea** (o **ellittica**) se $m = 0$ ovvero **Lorentziana** (o **iperbolico normale**) se $m = 1$ e $p \geq 1$.

Una forma quadratica non degenere su uno spazio vettoriale V di dimensione finita n è detta **prodotto scalare** o rispettivamente **pseudo prodotto scalare** se la sua segnatura è $(0, p)$ oppure (m, p) con $m > 0, p > 0$.
Una base di V, $\{e_i\}_{i=1,...,n}$ è detta **(pseudo) ortonormale** se la matrice dei coefficienti $g(e_i|e_j)$ assume **forma canonica**, cioé $diag(-1, \ldots, -1, +1, \ldots, +1)$ in cui -1 e $+1$ compaiono tante volte come prescritto dalla segnatura di g. L'esistenza di (infinite) basi (pseudo)ortonormali è garantita dallo stesso teorema di Sylvester.
Si prova facilmente, usando la diretta generalizzazione della procedura di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, che per ogni fissato vettore $u_1 \in V$ esistono vettori $u_2, \ldots, u_n \in V$ tale che $u_1, \ldots, u_n$ costituisca una base (pseudo) ortonormale.
Se $\epsilon := diag(-1, \ldots, -1, +1, \ldots, +1)$ è la forma canonica della forma quadratica non degenere g su V, l'insieme delle matrici reali $n \times n$, D, tali che

$$D^t \, \epsilon D = \epsilon$$

forma un gruppo. Tale gruppo è detto **gruppo di stabilità della (pseudo)metrica**. È chiaro che per segnature ellittiche tale gruppo è $O(n)$ dove n è la dimensione dello spazio V.
Chiaramente, interpretato in senso *passivo*, il gruppo di stabilità della (pseudo)metrica coincide con il gruppo delle trasformazioni da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che trasformano le componenti di un vettore da una base (pseudo)ortonormale in un altra base (pseudo)ortonormale di V. Nell'interpretazione *attiva*, fissata una base (pseudo)ortonormale, il gruppo di stabilità della (pseudo)metrica definisce, in tale base, il gruppo di trasformazioni da V in V che preservano lo (pseudo)prodotto scalare.

L'assegnazione di uno (pseudo) prodotto scalare $g(\ |\ )$ sullo spazio vettoriale reale di dimensione finita V determina un isomorfismo naturale tra V ed il suo duale V^*. Tale isomorfismo è definito da

$$\#_g : V \ni u \mapsto g(u|\ \ ) \in V^* \,.$$

Se $e_1, \ldots, e_n$ è una base di V e $e^{*1}, \ldots, e^{*n}$ è la base duale associata ed infine $g := g_{ij} e^{*i} \otimes e^{*j} = g(e_i|e_g) e^{*i} \otimes e^{*j}$ è la rappresentazione del tensore associato a g in $V^* \otimes V^*$ detto **tensore metrico**, allora l'azione di $\#_g$ in componenti delle basi dette è data da

$$\#_g : v^i \mapsto v_k := g_{ki} v^i \,.$$

Dal teorema di universalità $\#_g$ induce un analogo isomorfismo tra spazi del tipo $V^{n\otimes} \otimes V^{*n\otimes}$ e $V^{*n\otimes} \otimes V^{*n\otimes}$ che in componenti delle basi indotte da $e_1, \ldots, e_2$ e dalla sua duale agisce come:

$$t^{i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_p} \mapsto t_{k_1 \ldots k_n j_1 \ldots j_p} := g_{k_1 i_1} \cdots g_{k_n i_n} t^{i_1 \ldots i_n}{}_{j_1 \ldots j_p} \,.$$

Per tale motivo l'azione di $\#_g$ è anche detta **processo di abbassamento degli indici**.
L'isomorfismo inverso di $\flat_g := (\#_g)^{-1} : V^* \to V$ corrisponde ad un tensore in componenti dato da $g^{ik} e_i \otimes e_j$ dove la matrice dei coefficienti g^{ik} è l'inversa della matrice dei coefficienti g_{ij}

che rappresentano $\#_g$ nella base duale associata alla precedente $e^{*1}, \ldots, e^{*n}$. Risulta che vale l'identità

$$g_{ik}\, g_{jl}\, g^{kl} = g_{ij}$$

(si noti che tale identità non è evidente a priori perché il secondo membro *non* è definito dal primo ma $g_{ij} := g(e_i|e_j)$). L'azione di $\flat_g$ si estende a prodotti tensoriali e definisce il **processo di innalzamento degli indici**.
Si osservi infine che se lo spazio vettoriale è dotato di un prodotto scalare g propriamente definito (cioè definito positivo), allora in basi ortonormali la rappresentazione di g è data dal delta di Kroneker e pertanto, il processo di alzare ed abbassare gli indici, in tali basi (e nelle duali associate) non ha alcun effetto sui valori delle componenti:

$$v_i = \delta_{ij} v^j = v^i$$

malgrado esse si riferiscano a tensori in spazi diversi.

B.2 (Pseudo)Metriche e varietà (pseudo)riemanniane.

Una **(pseudo)metrica** su una varietà differenziabile M di dimensione n è data assegnando un campo tensoriale differenziabile covariante doppio simmetrico e non degenere $\mathbf{g}$, le cui matrici rappresentative abbiano *segnatura costante* al variare del punto sulla varietà. A tal proposito, si osservi che la legge di trasformazione delle componenti di $\mathbf{g}$ al variare del sistema di coordinate locali $\mathbf{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g'_{pq} dx'^p \otimes dx'^q$ è, punto per punto, proprio una trasformazione di congruenza generata da una matrice non singolare:

$$g'_{pq}(x) = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}|_x\, g_{ij}(x)\, \frac{\partial x^j}{\partial x'^q}|_x\, .$$

In tal modo il teorema di Sylvester assicura che la segnatura sia una proprietà del campo tensoriale $\mathbf{g}$. $\mathbf{g}$ è detto **tensore metrico** o **metrica** e la coppia $(M, \mathbf{g})$ è una **varietà riemanniana**. Se $n, m > 0$, $\mathbf{g}$ è detto **tensore pseudo metrico** o **pseudo metrica** e la coppia $(M, \mathbf{g})$ è una **varietà pseudo riemanniana**. In particolare, una varietà *lorentziana* si ha quando $n \geq 2$ e la segnatura di $\mathbf{g}$ è lorentziana: $(1, n-1)$ (ossia $(-1, +1, \ldots, +1)$), in tal caso il tensore pseudo metrico si dice tensore pseudo metrico **lorentziano**.

B.3 Varietà (pseudo)riemanniane, globalmente e localmente piatte.

Una varietà (pseudo)riemanniana $(M, \mathbf{g})$ è detta **globalmente piatta**[1] quando:
(a) ammette una struttura affine, compatibile con la struttura differenziale, che la rende spazio

[1] Precisiamo che, a seconda degli autori, esistono comunque differenti e non equivalenti definizioni della nozione di globale piattezza.

affine,
(b) $\mathbf{g}$ è rappresentato dalla matrice diagonale costante in forma canonica in un sistema di coordinate cartesiano generato dalla struttura affine.
(Si osservi che tutti gli altri sistemi di coordinate globali in cui la metrica ha costantemente forma diagonale canonica risultano banalmente essere cartesiani.)
Un modo del tutto equivalente di assegnare una varietà (pseudo) riemanniana globalmente piatta è quello di partire da uno spazio affine $\mathbb{A}^n$, di definire uno (pseudo)prodotto scalare nello spazio delle traslazioni V e di indurre un tensore metrico sulla varietà associata a $\mathbb{A}^n$ tramite l'isomorfismo naturale tra V e lo spazio tangente ad ogni punto di $\mathbb{A}^n$. Come visto in Appendice A, il tensore metrico ha allora componenti costantemente in forma canonica quando espresse in coordinate cartesiane (pseudo) ortonormali.
È chiaro che uno spazio (affine) euclideo identifica univocamente una varietà riemanniana globalmente piatta e viceversa.
Una varietà (pseudo)riemanniana $(M, \mathbf{g})$ è detta **localmente piatta** se nell'intorno U di ogni punto $p \in M$ c'è una carta locale (U, ϕ), $\phi : U \ni q \mapsto (x^1(q), \ldots, x^n(q)) \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{g}(q) = g_{ij}(q) dx^i|_q \otimes dx^j|_q$ dove la matrice dei coefficienti $g_{ij}(q)$ ha costantemente forma canonica per ogni $q \in U$.
Una varietà localmente piatta in generale non è globalmente piatta: un cilindro in $\mathbb{E}^3$ con la metrica indotta da quella di $\mathbb{E}^3$ è una varietà localmente piatta che non è globalmente piatta.
Condizioni necessarie e sufficienti affinchè una varietà (pseudo) riemanniana sia localmente piatta sono date dall'annullarsi ovunque del tensore di curvatura di Riemann [2].

B.4 Metriche e pseudo metriche indotte.

Se $(M, \mathbf{g})$ è una varietà (pseudo)riemanniana di dimensione n e $\Sigma \subset M$ è una sottovarietà differenziabile embedded in M di dimensione $s \leq n$, la (pseudo)metrica $\mathbf{g}$ induce un campo tensoriale differenziabile covariante doppio simmetrico Ψ_Σ su Σ che viene detto **metrica** o **pseudo metrica** (a seconda dei casi) **indotta su** Σ quando non è degenere in alcun punto di Σ. Si procede nel seguente modo. Dato che la varietà Σ è embedded, per ogni punto $p \in \Sigma$, lo spazio tangente $T_p\Sigma$ è incluso canonicamente nello spazio tangente T_pM come un sottospazio. Di conseguenza, se $u, v \in T_p\Sigma$, $\mathbf{g}_p(u|v)$ è ben definito e, se u, v sono campi vettoriali differenziabili su Σ, è una funzione differenziabile di $p \in \Sigma$. Ciò definisce su Σ il campo tensoriale differenziabile covariante doppio simmetrico Ψ_Σ di cui sopra.
Dal punto di vista delle componenti, notiamo che c'è una carta locale di M, con coordinate $x^1, \ldots, x^n$, definita in un intorno U di p in cui $\Sigma \cap U$ è rappresentata dalle funzioni differenziabili $x^i(y^1, \ldots, y^s)$, $i = 1, \ldots, n$, dove $y^1, \ldots, y^s$ sono coordinate associate ad una carta locale definita in un intorno V di p in Σ. La matrice jacobiana delle funzioni differenziabili dette ha rango s in V. Risulta facilmente che, se $q \in V$ e $\mathbf{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ in U,

$$\Psi_\Sigma(q) = g_{ij}(q) \frac{\partial x^i}{\partial y^a}|_q \frac{\partial x^j}{\partial y^b}|_q dy^a|_q \otimes dy^b|_q \,.$$

Bibliografia

[1] V. Moretti, *Multi-Linear Algebra and Tensor Calculus in Mathematical Physics with Applications to Special Relativity*, 2006.
http://www.science.unitn.it/˜moretti/dispense.html

[2] V. Moretti, *Tensor analysis on differentiable manifolds with applications to relativistic theories*, 2006.
http://www.science.unitn.it/˜moretti/dispense.html

[3] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 1990

[4] M.P.do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston 1992

[5] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with application to Relativity*, Interscience Publishers, New York, 1983

[6] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, K. L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Academic Press, 1994

[7] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko, *Geometria Contemporanea* Vol I, Editori Riuniti/Mir, 1987

[8] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko, *Geometria Contemporanea* Vol II, Editori Riuniti/Mir, 1987

[9] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 1990

[10] J.D. Jackson, *Elettrodinamica Classica*, Zanichelli, Trento, 1988

[11] A. Einstein, *Ann. d. Physik*, 17, (1905)

[12] A.A. Michelson and E.W. Morley, *On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*, Am. J.Sci. (3rd series) 34 333-345 (1887).
vedi anche R.S. Shankland, *Michelson - Morley Experiment*, American Journal of Physics 1964, p.16.

[13] U. Bottazzini *I grandi della scienza: Poincaré*, LE SCIENZE n.7 febbraio 1999 e S. Bergia *I grandi della scienza: Einstein*, LE SCIENZE n.6 agosto 2000 (RISTAMPA).

[14] R.S. Shankland et al, *Rev. Mod. Phys.* 27 no.2, 167-178 (1955)

[15] S. Liberati, S. Sonego and M. Visser, *Faster-than-c Signals, Special Relativity and Causality*, *Ann. Phys.*, 298, 2002

[16] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of the physical reality be considered complete*, Phys. Rev. 47, p777, (1935)

[17] B. d'Espagnat, *I fondamenti concettuali della Meccanica quantistica*, Bibliopolis, Napoli, 1995.

[18] G. Boniolo (a cura di), *Filosofia della Fisica*, Bruno Mondadori, 1997.

[19] M. Sherwin, *Some Recent Experimental Tests of the 'Clock Paradox'*, Phys. Rev. 129 no. 1, 17 (1960)

[20] D. Frisch and J. Smith, *Measurement of the Relativistic Time Dilation Using Mesons*, Am. J. Phys. 31, 342 (1963).

[21] Haefele and Keating *Nature* 227, 270 (1970),(Proposal); *Science* Vol. 177, 166 - 170 (1972) (Experiment)

[22] R.F. Streater and A.S. Wightman: *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Princeton University Press, revised version, Princeton, 2000.

[23] F.W. Warner: *Foundation of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[24] M.A. Najmark e A.I. Stern: *Teoria delle rappresentazioni dei gruppi*, Editori Riuniti, Roma, 1984.

[25] W. Rudin: *Analisi Reale e Complessa*, Bollati Boringhieri, Torino, 1974
W. Rudin: *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Boston, 1991 seconda edizione.

[26] R.M. Wald: *General Relativity*; Chicago University Press, Chicago, (1984)

[27] C. von Westenholtz: *Differential Forms in Mathematical Physics*; North-Holland, Amsterdam, (1978)